Implicazione logica

L' **implicazione logica** è un connettivo logico attraverso il quale, a partire da due proposizioni *p* e *q* , si forma una nuova proposizione ,chiamata *p implica q* e si scrive $p \rightarrow q$, la quale è falsa solo se p è vera e q è falsa

Questa definizione si può riassumere mediante la seguente tabella di verità:

p	q	p → q
falsa	falsa	vera
falsa	vera	vera
vera	falsa	falsa
vera	vera	vera

Si dice anche che

- p è condizione sufficiente per q;
- q è condizione necessaria per p;

NOTARE CHE LA TABELLA DI VERITA' DELL'IMPLICAZIONE $p \rightarrow q$

E' EQUIVALENTE ALL'ESPESSIONE $\overline{p} + q$

Esempio
p è la proposizione "piove"
q è la proposizione "Giulia resta a casa"
$p \rightarrow q$ "se **piove** allora **Giulia resta a casa**"

Usando l'equivalenza con $\overline{p} + q$ possiamo affermare :
O non piove o Giulia resta a casa

MA
Se non piove Giulia può restare a casa oppure no!

CONTRARIA-INVERSA-CONTRONOMINALE

Data l'implicazione p→q (**implicazione diretta**),
l'implicazione $\overline{p} \rightarrow \overline{q}$ si dice **contraria** di $p \rightarrow q$;

l'implicazione $q \rightarrow p$ si dice **inversa** di $p \rightarrow q$;

l'implicazione $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$ si dice **contronominale** di $p \rightarrow q$.

L'**Implicazione diretta e contronominale sono logicamente equivalenti**, come si può facilmente controllare costruendo le relative tavole di verità. Sempre utilizzando le tavole di verità si può dimostrare che una implicazione *non* equivale logicamente alla sua inversa né alla sua contraria.

Tavole di verità

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \rightarrow q$	$\bar{p} \rightarrow \bar{q}$	$q \rightarrow p$	$\bar{q} \rightarrow \bar{p}$
falsa	falsa	vera	vera	**vera**	**vera**	**vera**	**vera**
falsa	vera	vera	falsa	**vera**	**falsa**	**falsa**	**vera**
vera	falsa	falsa	vera	**falsa**	**vera**	**vera**	**falsa**
vera	vera	falsa	falsa	**vera**	**vera**	**vera**	**vera**

Osserviamo che implicazione diretta e contronominale hanno lo stesso valore di verità , mentre l'inversa ha lo stesso valore di verità della contraria.

ESEMPI

Sia N un numero intero

p è la proposizione "N ha lo zero come ultima cifra"

q è la proposizione " N è pari"

Consideriamo l'implicazione $p \to q$
"Se N ha lo zero come ultima cifra allora è pari"; VERA
La sua contraria è:
"Se N non ha lo zero come ultima cifra allora non è pari"; FALSA

La sua inversa è:

" Se N è pari allora ha lo zero come ultima cifra "; FALSA

La sua contronominale è

" **Se N non è pari allora non ha lo zero come ultima cifra VERA**
Possiamo allora affermare:

- Condizione sufficiente , ma non necessaria, affinché N sia pari è che la sua ultima cifra sia lo zero
- Condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché N abbia come ultima cifra lo zero, è che N sia pari.

LA DOPPIA IMPLICAZIONE

Sia T un triangolo;
Consideriamo le due proposizioni:
p = "T è rettangolo"
q = " Le misure dei lati di T verificano la relazione pitagorica

In questo caso
$p \rightarrow q$:
"Se T è rettangolo allora le misure dei lati di T verificano la relazione pitagorica" VERA

La sua contraria è:
" Se T non è rettangolo allora le misure dei lati di T non verificano la relazione pitagorica" VERA

La sua inversa è:
"Se le misure dei lati di T verificano la relazione pitagorica allora T è rettangolo " VERA

La sua contronominale è
"Se le misure dei lati di T non verificano la relazione pitagorica allora T non è rettangolo " VERA

Le implicazioni sono tutte e quattro vere.

Si parla allora di <u>Implicazione doppia</u> ($p \leftrightarrow q$)che si può esprimere nelle forme seguenti:

- p se e solo se q.
- p è condizione necessaria e sufficiente per q.
- p è equivalente a q.

$p \leftrightarrow q$ è vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità

p	q	**$p \leftrightarrow q$**
falsa	falsa	vera
falsa	vera	falsa
vera	falsa	falsa

vera	vera	vera

Possiamo allora affermare

Se e solo se T è rettangolo allora le misure dei lati di T verificano la relazione pitagorica"

- **Condizione necessaria e sufficiente affinché i lati di T verifichino la relazione pitagorica è che T sia rettangolo**

Le due proposizioni:

p "T è rettangolo"
q "Le misure dei lati di T verificano la relazione pitagorica"

sono logicamente equivalenti

REGOLE DI INFERENZA

Regola di inferenza deduttiva o Modus ponens

Se $p \rightarrow q$ è vera e *p* è vera allora ***q* è vera**

Tavole di verità

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \cap p$	$((p \rightarrow q) \cap p) \rightarrow q$
falsa	falsa	vera	falsa	**vera**
falsa	vera	vera	falsa	**vera**
vera	falsa	falsa	falsa	**vera**
vera	vera	vera	vera	**vera**

Regola di inferenza della contronominale   o Modus tollens

Se $p \rightarrow q$ è vera e $\overline{q}$ è vera allora $\overline{p}$ **è vera**

Tavole di verità

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \cap \bar{q})$	$((p \rightarrow q) \cap \bar{q}) \rightarrow \bar{p}$
falsa	falsa	vera	vera	**vera**
falsa	vera	vera	falsa	**vera**
vera	falsa	falsa	falsa	**vera**
vera	vera	vera	falsa	**vera**

ESEMPI

” $p \rightarrow q$ “se **piove** allora **Giulia resta a casa**“

A) PIOVE! **allora Giulia resta a casa**

B) Giulia non resta a casa! allora **Non piove**

ESERCIZI

(01) Dire quali delle seguenti coppie di forme proposizionali sono logicamente equivalenti

(*il simbolo* **¬** = NOT) :

(a) A $(A \lor B) \land (A \lor \neg B)$

(b) $\neg(A \land \neg B)$ $\neg A \lor B$

(c) $A \to B$ $\neg B \to A$

(d) $A \lor B$ $(\neg A \land B) \lor (A \land \neg B)$

(e) $A \land (B \to C)$ $B \land (A \to C)$

(f) $(A \lor B) \to C$ $(A \to C) \land (B \to C)$

Risp: sotto la casella

---

(02) Posto: A = "Carlo è ligure" e B = "Diego è piemontese", scrivere le proposizioni che formalizzano i seguenti enunciati:

(a) "Carlo non è ligure" risp($\neg A$)
(b) "Carlo è ligure e Diego è piemontese"
(c) "Carlo è ligure sebbene Diego sia piemontese"
(d) "Non è vero che Carlo sia ligure e Diego piemontese"
(e) "Se Carlo non è ligure, allora Diego non è piemontese"
(f) "È falso che se Carlo è ligure, allora Diego è piemontese"
(g) "Carlo è ligure solo se Diego non è piemontese"
(h) "Carlo è ligure se e solo se Diego è piemontese"
(i) "O Carlo è ligure o, se Carlo non è ligure, allora Diego è piemontese"
(l) "O Carlo è ligure e Diego è piemontese, o né Carlo è ligure, né Diego è piemontese"
(m) "Carlo è ligure se Diego è piemontese"

Risp sotto la casella

ESERCIZI (gentilissima concessione del prof. Raffaele Mascella dell'Università di Teramo)

1) "[…] dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste un'enunciazione vera oppure falsa.

Tale enunciazione non sussiste certo in tutti: la preghiera, ad esempio, è un discorso, ma non risulta né vera né falsa.

Prescindiamo dunque dagli altri discorsi, dal momento che l'indagine al riguardo è più pertinente alla retorica

o alla poetica. Il discorso dichiarativo spetta invece alla presente considerazione"

(Aristotele, *De interpretazione*)

Quale termine abbiamo noi utilizzato, al posto dell'aristotelico "discorsi dichiarativi"?

2) Quali fra le seguenti frasi sono da considerarsi delle "proposizioni"?

(a) "La porta è chiusa"

(b) "Forse la porta è chiusa"

(c) "Probabilmente Albert Einstein descrisse la teoria della relatività ristretta nel 1905"

(d) "Nel 1905 Albert Einstein descrisse la teoria della relatività ristretta"

(e) "La soluzione dell'equazione $3x + 15 = 24$ è $x = 3$"

(f) "Quanti anni hai?"

(g) "Il 21 luglio del 336 a.C. Aristotele aveva una rana sotto la tunica"

(h) "La capitale d'Italia è Milano"

(i) "Fatti mandare dalla mamma a prendere il latte!"

3) "[…] nella lingua italiana, così come in tutti i linguaggi naturali, queste particelle logiche

sono polivalenti e ambigue, si presentano in tante versioni equivalenti e hanno diversi sensi.

Ad esempio la congiunzione «e» tra due enunciati può essere espressa in molteplici varianti

(«Marco è bravo e intelligente», «Marco è bravo, ma anche intelligente», «Marco è sia bravo, sia intelligente») ma quando è presente può avere anche significati diversi dall'affermazione che gli enunciati sono congiunti

(«si sposarono e vissero felici e contenti», che ha senso «e poi» ad indicare una consequenzialità),

così come la disgiunzione «o» che può avere

- un senso debole o inclusivo (se indica l'uno, o l'altro, o anche tutti e due: «se è sereno o fa caldo vado al mare»)

- oppure un senso forte o esclusivo (se indica l'uno, o l'altro, ma non tutti e due: «oggi vado al mare o resto a casa»).

Gli esempi di usi e significati alquanto differenziati non terminano certo qui,

ma credo che il senso sia stato compreso:

nelle lingue naturali abbiamo molte possibilità di esprimere uno stesso concetto,

avvalendoci dei significati multiformi delle parole, delle molteplici strutture grammaticali,

dei contesti in cui vengono usate, dell'enfasi attribuita attraverso la punteggiatura o con l'oratoria.

In Logica è opportuno invece ricondurre tutte queste molteplicità espressive a quelle "di base",

cioè raggruppandole in base al significato che hanno,

e considerando la forma linguisticamente più semplice per la loro denotazione.

Le particelle logiche aventi stesso significato sono così riportate ad un'unica rappresentazione,

sia per simbolo che per significato" (R. Mascella)

Ciò premesso,

I) dire in quali delle seguenti proposizioni la congiunzione "e" si può esprimere tramite il connettivo $\bigwedge$ $\wedge$:

(a) "Carlo e Marco sono insegnanti"

(b) "Carlo e Marco stanno venendo alla festa"

(c) "Carlo ha una maglia bianca e blu"

(d) "Carlo è andato al bar e ha preso un caffè"

(e) "Carlo e Marco pesano ciascuno 80 Kg"

(f) "Carlo e Marco pesano insieme 160 Kg"

II) Dire in quali delle seguenti proposizioni la "o" è inclusiva:

(a) "Nelle fermate a richiesta l'autobus si ferma se qualche persona deve scendere o salire"

(b) "Nel menu turistico è compreso il dolce o la frutta"

(c) “Paolo sposerà Marina o Monica”

(d) “Per vincere quel concorso bisogna essere molto bravi o raccomandati”

(e) “L’unanimità si raggiunge quando tutti sono favorevoli o tutti sono contrari”

(f) “Puoi farmi avere notizie tramite Claudia o tramite Elisa”

4) “Sono ammesse al concorso le persone che sono laureate e che hanno meno di trent’anni o hanno figli”. Aldo non è laureato, ha ventisei anni e un figlio. Paolo è laureato, ha quarant’anni e due figli. Vincenzo è laureato, ha trentadue anni e non ha figli. Chi può partecipare al concorso?

5) Aldo, Bruno e Carlo sono tre studenti che hanno sostenuto un esame. Ponendo: A = “Aldo ha superato l’esame”, B = “Bruno ha superato l’esame”, C = “Carlo ha superato l’esame”, determinare le proposizioni composte che traducono, attraverso i connettivi logici, i seguenti enunciati:

(a) “Solo Carlo ha superato l’esame”

(b) “Solo Aldo non ha superato l’esame”

(c) “Solo uno tra Aldo, Bruno e Carlo ha superato l’esame”

(d) “Almeno uno tra Aldo, Bruno e Carlo ha superato l’esame”

(e) “Almeno due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”

(f) “Al più due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”

(g) “Esattamente due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l’esame”

6) Aldo, Bruno e Carlo sono gli unici tre membri di una commissione che vota una proposta. Ponendo: A = “Aldo vota a favore”; B = “Bruno vota a favore ”; C = “Carlo vota a favore”, determinare le proposizioni composte che traducono i seguenti enunciati:

(a) “La votazione è stata unanime”

(b) “La proposta, in seguito alla votazione, è passata”

(c) “La proposta ha ricevuto un numero dispari di voti a favore”

(d) “La proposta è stata respinta, ma non all’unanimità”

(e) “La proposta è stata respinta; Bruno ha votato contro”

7) Posto: A = “Carlo è ligure” e B = “Diego è piemontese”, scrivere le proposizioni che traducono, attraverso i connettivi logici, i seguenti enunciati:

(a) “Carlo non è ligure”

(b) “Carlo è ligure e Diego è piemontese”

(c) “Carlo è ligure sebbene Diego sia piemontese”

(d) “Non è vero che Carlo sia ligure e allo stesso tempo Diego piemontese”

(e) “O Carlo è ligure e Diego è piemontese, o né Carlo è ligure, né Diego è piemontese”

8) *Da un Test di Ingresso alla Facoltà di Architettura*.

Nel diario del giovane Telesforo è scritto:

Nonno Ubaldo dice che quando era giovane ha traversato l'oceano Atlantico a nuoto e che riusciva a battere in velocità le balene.

Secondo me questa è una bugia.

Si dica cosa si può correttamente dedurre dalla convinzione di Telesforo.

A) Nonno Ubaldo non ha traversato l'Atlantico a nuoto ma riusciva comunque a battere in velocità le balene

B) A Nonno Ubaldo non piacciono le balene

C) Nonno Ubaldo non ha traversato l'Atlantico a nuoto e non riusciva a battere in velocità le balene

D) Nonno Ubaldo ha traversato l'Atlantico a nuoto ma non riusciva a battere in velocità le balene

E) Se Nonno Ubaldo riusciva a battere in velocità le balene allora non ha traversato l'oceano Atlantico a nuoto

9) Dire quali delle seguenti coppie di forme proposizionali sono logicamente equivalenti:

(a) p , $(p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$ (b) $\overline{p \wedge \overline{q}}$, $\overline{p} \vee q$

(c) $p \vee q$, $(\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})$

RISPOSTE

Le risposte verranno scoperte in seguito.

Provate voi a dare le vostre risposte.