NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

CORSO DI LAUREA...................................

Esame di Calcolo Matriciale, 30 giugno 2005

1. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & i \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,3}.$$
   (a) Trovare una decomposizione di A in valori singolari.

   (b) Trovare la soluzione ai minimi quadrati del sistema $AX = B$ dove $B = {}^t(1\ i)$.

2. Sia data la matrice
$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$
   (a) Determinare la forma canonica di Jordan di C.

   (b) Calcolare C^{-1} usando il teorema di Hamilton–Cayley.

   (c) Calcolare la matrice $f(A)$, dove $f(x) = x^2 + 2/x$.

3. Sia data la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -h & k-1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Si dica per quali valori di k ed h la fattorizzazione $\mathcal{LU}$ di M è possibile.

   (b) Per $k = 1 = h$ si calcoli l'inversa di M con il metodo di Gauss–Jordan, ricorrendo, se necessario, ad una permutazione delle righe.

4. Siano A, $B \in \mathbb{C}^{n,n}$. Si dimostri che AB e BA hanno gli stessi autovalori. Si dica sotto quali condizioni le matrici AB e BA sono simili.

5. Trovare una curva di Bézier (in rappresentazione parametrica) che approssimi il grafico di $y = x^3$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzioni degli esercizi

1. (a) Gli autovalori di
$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
sono $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$, quindi i valori singolari sono $\sigma_1 = 2$ e $\sigma_2 = \sqrt{2}$. Una base di autovettori di A^*A è
$$Q_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad Q_2 = (0, 1, 0), \quad Q_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}),$$
quindi la matrice unitaria Q è
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
mentre
$$P_1 = \frac{1}{\sigma_1} AQ_1 = {}^t(i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$
$$P_2 = \frac{1}{\sigma_2} AQ_2 = {}^t(\frac{\sqrt{2}}{2}, i\frac{\sqrt{2}}{2})$$
Quindi
$$P = \begin{pmatrix} i\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$
Si conclude che
$$A = P\Sigma Q^* \quad \text{dove} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Come è noto, $X = A^+B$, dove
$$A^+ = Q\Sigma^+P^* = \begin{pmatrix} -\frac{i}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$
Ne segue $X = (0, 1, 0)$.

2. (a) Gli autovalori di C sono $\lambda_1 = -1$ con $m_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ con $m_2 = 1$. Si vede facilmente che
$$V(-1) = \{(x, y, z) \mid -x + y + z = 0\} \quad \Rightarrow \quad \dim V(-1) = 2.$$
Quindi C è diagonalizzabile e la sua forma canonica di Jordan è
$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Usando il polinomio caratteristico si ha

$$C^{-1} = -\frac{1}{2}(C^2 + 4C + 5I).$$

(c) $f(C) = C^2 + 2C^{-1} = -4C - 5I$.

3. (a) Da $\det A_2 = 0$ o $\det A_3 = 0$ si ottiene che il metodo non è applicabile se $k - 1 = 0$ o $3 - h - 2k = 0$.

   (b) Per $k = 1 = h$ la matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

   ed il metodo non è applicabile direttamente. Ma scambiando la prima riga con l'ultima si ha una matrice $\Pi_{14}M$ il cui determinante è diverso da 0, ove

$$\Pi_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Applicando il metodo di Gauss–Jordan a $\Pi_{14}M$ si ha

$$(\Pi_{14}M)^{-1} = N \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = N\Pi_{14}.$$

4. Sia A non singolare. Allora $AB = A(BA)A^{-1}$, dunque le due matrici sono simili. Nel caso generale, se $\lambda \neq 0$ è un autovalore di AB, e se $X \neq O$ è un autovettore corrispondente a λ, allora $BX \neq O$ e $(BA)BX = B\lambda X$, dunque λ è un autovalore di BA con autovettore BX. Considerando l'autovalore nullo nel caso in cui AB sia singolare, è evidente che anche BA è singolare.

5. Si veda l'analogo esercizio della prova scritta dell'11/1/2005.