NOME e COGNOME.. **MATRICOLA n**...............

CORSO DI LAUREA...................................

Esame di Calcolo Matriciale, 17 luglio 2006

1. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$$
   (a) Provare che e^{At} è una matrice unitaria.
   (b) Calcolare $\det(e^{A^{20}})$.

2. Si consideri il polinomio $p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$. Si dica se la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   è radice del precedente polinomio senza effettuare il calcolo esplicito.

3. Si consideri il polinomio $q(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 31x - 40$. Si localizzino le sue radici nel piano complesso.

4. Si consideri la matrice
$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & g & 0 \\ 0 & a & 0 & g \\ -g & 0 & a & 0 \\ 0 & -g & 0 & a \end{pmatrix}.$$
   (a) Si dica per quale valore di a, $g \in \mathbb{C}$ è possibile applicare la decomposizione $\mathcal{L}\mathcal{L}^*$ ad M.
   (b) Si calcoli la decomposizione $\mathcal{L}\mathcal{L}^*$ per i valori ottenuti nel punto precedente.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzione degli esercizi

1. (a) Poniamo $A = iB$, dove $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. B è simmetrica, quindi

$$B = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P,$$

con P matrice ortogonale. Allora $At = iBt = P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2it \end{smallmatrix}\right)P$, $e^{At} = P^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{2it} \end{smallmatrix}\right)P$. Ora $(e^{At})^* = P^*\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{smallmatrix}\right)(P^{-1})^*$, quindi, essendo P ortogonale, segue $e^{At}(e^{At})^* = P^{-1}I(P^{-1})^T = I$.

(b) È noto che $\det(e^{A^k}) = e^{\mathrm{tr}(A^k)}$. Ma $A^k = I^k B^k = 2^{k-1} I^k B$, quindi $A^{20} = 2^{19}B$, quindi $\mathrm{tr}(A^{20}) = 2^{20}$.

2. Il polinomio p ha radici $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 1, e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica 3. Invece, la matrice A ha autovalori 3, 2, 1. Siccome ogni polinomio che annulla la matrice A deve avere come fattore il polinomio minimo di A, e siccome il polinomio minimo di A ha come radici tutti e soli gli autovalori di A, ne segue che $p(A) \neq O$.

   Più semplicemente, nel nostro caso, poiché A è simile alla matrice $D = \mathrm{diag}(3, 2, 1)$ e quindi $p(A) = B^{-1}p(D)B$, si ha $p(A) = O$ se e solo se $p(D) = 0$. Da cui si conclude $p(A) \neq O$ perché $p(3) \neq O$.

3. Il polinomio $q(x)$ è monico, dunque si può applicare il teorema di Cauchy, secondo il quale gli zeri del polinomio si trovano nel cerchio

$$M = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|\},$$

   dove $n - 1 = 3$, $a_0 = -40$, $a_1 = -31$, $a_2 = -3$, $a_3 = 1$. Il teorema di Cauchy può essere dimostrato utilizzando il primo teorema di Gershgorin applicato alla matrice compagna del polinomio $q(x)$.

4. (a) Affinché la matrice sia hermitiana deve essere $a \in \mathbb{R}$ e $g = if$ con $f \in \mathbb{R}$. Inoltre gli autovalori della matrice sono $a \pm ig$ con molteplicità algebrica 2; affinché questi risultino positivi deve essere $a > |f|$.

(b) Applicando la definizione, $M = LL^*$, dove L è triangolare inferiore ed ha elementi diagonali positivi; dunque

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & 0 & 0 \\ \frac{-if}{\sqrt{a}} & 0 & \sqrt{a - \frac{f^2}{a}} & 0 \\ 0 & \frac{-if}{\sqrt{a}} & 0 & \sqrt{a - \frac{f^2}{a}} \end{pmatrix}$$