NOME e COGNOME.. **MATRICOLA n**..............

CORSO DI LAUREA..................................

Esame di Calcolo Matriciale, 13 febbraio 2006

1. Si considerino le seguenti matrici quadrate di ordine 7 e diagonali a blocchi:

$$A = \begin{pmatrix} B & O & O \\ O & B & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} B & O & O \\ O & C & O \\ O & O & C \end{pmatrix},$$

   dove

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Provare che $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$ e $P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$.

   (b) Le matrici A e A' sono simili?

2. Si consideri le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calcolare e^A ed e^B (in modo diretto).

   (b) Provare che $e^{A+B} \neq e^A\, e^B$ (si consiglia di fissare opportunamente a e b).

3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) La fattorizzazione $\mathcal{LU}$ di A è possibile in questo caso? E la fattorizzazione $\mathcal{QR}$?

   (b) Si determini una fattorizzazione $\mathcal{LU}$ di ΠA, ove Π è un'opportuna matrice di permutazione, usando il metodo del massimo *pivot* parziale.

4. Dimostrare che una matrice $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ ortogonale è di Givens se $\det A = 1$ ed è di Householder se $\det(A) = -1$.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzione degli esercizi

1. (a) $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A') = 4$. Per A basta considerare la sottomatrice I_4 costituita dalle righe 2, 4, 5 e colonne 2, 3, 5, 6. Per A' basta considerare la sottomatrice I'_4 costituita dalle righe 1, 2, 4, 6 e colonne 2, 3, 5, 7. Inoltre

$$P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda) = (-\lambda)^7 = -\lambda^7.$$

   (b) Le matrici A e A' non sono simili poiché A e A' sono nella forma canonica di Jordan, ma A ha 2 blocchi di ordiner 3 ed 1 di ordine 1, mentre A' ha due blocchi di ordine 2 ed uno di ordine 3.

2. (a) Si ha $A = a\tilde{A}$, $B = b\tilde{B}$ dove

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   e risulta per ogni $k \in \mathbb{N}$ $\tilde{A}^k = \tilde{A}$, e $\tilde{B}^2 = O$. Pertanto

$$e^A = I + (e^A - 1)\tilde{A}, \qquad e^B = I + B.$$

   (b) Posto $a = 1 = b$ si verifica facilmente che $e^{A+B} \neq e^A\, e^B$.

3. (a) La fattorizzazione $\mathcal{LU}$ di A non è possibile in questo caso poiché $\det A_3 = 0$. Ma la fattorizzazione $\mathcal{QR}$, come si sa, è sempre possibile.

   (b)

4. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Poiché A è ortogonale si ha $a^2 + c^2 = 1$, dunque si può porre $a = \cos\phi$ e $c = \sin\phi$. Essendo $ab + cd = 0$ deve essere $b = -\sin\phi$ e $d = \cos\phi$, oppure $b = \sin\phi$ e $d = -\cos\phi$. Nel primo caso A è di Givens con $\psi = 1$. Nel secondo caso A è di Householder con $V = (-\sin(\phi/2), \cos(\phi/2))^T$.