NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

CORSO DI LAUREA...................................

Esame di Calcolo Matriciale, 27 giugno 2006

1. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Si calcoli la forma canonica di Jordan J della matrice A.

   (b) Si calcoli e^J.

2. Sia data la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Si calcoli una fattorizzazione $\mathcal{QR}$ di M usando matrici di Givens anziché matrici elementari di Householder.

3. Dati i punti $P_1(1,2,0)$, $P_2(-1,1,0)$, $P_3(0,3/2,1/2)$, $P_4(0,0,0)$ si trovi l'equazione del piano della forma $\alpha : z = ax + by + d$ che approssima in media tali punti nel senso dei minimi quadrati.

4. Sia $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Si dimostri che vale l'uguaglianza
$$\rho(A^k) = \rho(A)^k.$$

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzione degli esercizi

1. Il poliomio caratteristico è $(2-\lambda)^2(1-\lambda)^3$; inoltre

$$V(1) = \{(0,0,a,-a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}, \qquad V(2) = \{(a,b,-b,0,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\},$$

dunque $\dim V(1) = 1$, $\dim V(2) = 2$. Quindi la forma canonica di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_2 \end{pmatrix}, \quad J_1 \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad J_2 \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Tenendo conto che $h_1 = \dim V(1) = 1$ e $h_2 = \dim V(2) = 2$ segue immediatamente che

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Indicate le due matrici rispettivamente con D ed N si ha

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = O,$$

quindi $e^N = 1 + N + N^2/2$. Si conclude che

$$e^J = e^D\, e^N = \begin{pmatrix} e & e & e/2 & 0 & 0 \\ 0 & e & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

2. La matrice di Givens necessaria per annullare l'elemento di posto $4,3$ della matrice M è

$$G_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Si ha

$$G_{34}M = R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

quindi la fattorizzazione cercata è $M = QR$ con $Q = G_{34}^{-1}$.

3. Il sistema
$$\begin{cases} 0 = a + 2b + d \\ 0 = -a + b + d \\ 1/2 = 3/2b + d \\ 0 = d \end{cases}$$
non ha soluzioni perché i punti non sono complanari, P_3 non appartiene al piano contenente gli altri punti. Il sistema può essere ridotto nella forma
$$\begin{cases} 0 = a + 2b \\ 0 = -1 + b \\ 1/2 = 3/2b \end{cases}$$
La soluzione ai minimi quadrati si ottiene calcolando A^+B, dove
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$
Si ha
$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* = \begin{pmatrix} \frac{29}{54} & -\frac{2}{27} \\ -\frac{2}{27} & \frac{4}{27} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & -\frac{11}{18} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix},$$
da cui facilmente la soluzione.

4. Usando la forma canonica di Schur si ha $A = P^{-1}\Delta P$, $A^k = P^{-1}\Delta^k P$, e, come si può dimostrare, detti d_{ii} gli elementi di Δ sulla diagonale, i corrispondenti elementi di Δ^k sono d_{ii}^k. Si osservi che anche Δ^k è triangolare superiore. Essendo $\rho(A) = \rho(\Delta)$ e $\rho(\Delta^k) = \rho(\Delta)^k$, si ha la tesi.