NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**..............

CORSO DI LAUREA...................................

Esame di Calcolo Matriciale, 15 maggio 2006

1. (a) Sia $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ una matrice tale che $A = dI + B$, dove $B^2 = 0$ e $d \in \mathbb{R}$. Si calcoli e^A.

   (b) Utilizzando il risultato precedente, calcolare e^A,dove

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sia data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Quali fattorizzazioni della matrice M sono possibili, secondo le teorie studiate, al fine di risolvere un eventuale sistema lineare avente M come matrice dei coefficienti?

   (b) Si calcoli l'inversa di M con il metodo di Gauss–Jordan, ricorrendo, se necessario, ad una permutazione delle righe.

3. Sia data la curva $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $p(t) = (t, \arctan t)$.

   (a) Si trovi una curva di Bézier che approssima la funzione data nell'intervallo $[0, 1]$.

   (b) Si rappresenti graficamente l'inviluppo convesso determinato dai punti di controllo della curva di Bézier.

   (c) Si determini l'immagine della curva di Bézier rispetto alla trasformazione affine

$$\Phi((x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

4. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice antisimmetrica. Si dimostri che nel polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ di A tutti i coefficenti di grado $n - i$ si annullano, per i dispari.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzione degli esercizi

1. (a) Si ha
$$e^A = e^{dI} e^B = e^d \, I \, e^B,$$
ma $e^B = I + B = I + A - dI$, dunque $e^A = e^d(A + (1-d)I)$.

   (b) Si vede facilmente che $A = I + B$, con $B^2 = 0$, quindi $e^A = eA$.

2. (a) La matrice M ammette una fattorizzazione $\mathcal{LU}$ se i minori principali di ordine 1, 2 e 3 sono non singolari. Questo non è vero per M. Tuttavia è sufficiente scambiare la seconda riga con la quarta per ottenere una matrice che ammette una fattorizzazione $\mathcal{LU}$. La matrice M non ammette una fattorizzazione di Cholesky (valida solo per matrici hermitiane definite positive) ma ammette una fattorizzazione $\mathcal{QR}$.

   (b) Si proceda come nell'esercizio di riepilogo n. 5.8 delle dispense (relativamente al capitolo sui sistemi lineari).

3. (a) Si ha $P_0 = (0,0)$, $P_3 = (1, \pi/4)$, $p'(t) = (1, 1/(1+t^2))$, dunque $p'(0) = (1,1)$, $p'(1) = (1, 1/2)$, $P_1 = 1/3\, p'(0) + P_0$, $P_2 = -1/3\,(p'(1) + P_3$. La curva di Bézier è data dalle formule usuali
$$p(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3.$$

   (b) L'inviluppo convesso è il quadrilatero convesso che ha per vertici i punti di controllo P_i.

   (c) È sufficiente, dalla teoria, calcolare le immagini dei quattro punti di controllo: infatti l'immagine di tutta la curva sarà la curva di Bézier che per punti di controllo le immagini dei punti di controllo originali.

4. Tenendo conto dell'identità $A^t = -A$ si ha
$$\det(A - \lambda I) = \det(A^t - \lambda I) = (-1)^n \det(A - (-\lambda)I),$$
da cui risulta l'identità $P_A(\lambda) = (-1)^n P_A(-\lambda)$. Quindi per i coefficienti di grado $n-i$ si ha
$$b_{n-i} = (-1)^n (-1)^{n-i} b_{n-i}$$
da cui per i dispari la conclusione.