NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**..............

CORSO DI LAUREA...................................

Esame di Calcolo Matriciale, 31 marzo 2005

1. Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice a blocchi

$$M = \begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{pmatrix}.$$

(a) Provare che M è nilpotente, determinandone l'indice di nilpotenza.

(b) Trovare la forma canonica (di Jordan) di M.

2. Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Se $P \in \mathbb{R}^{m,m}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ sono matrici ortogonali, mostrare che le matrici

$$B = PA, \qquad C = AQ$$

hanno gli stessi valori singolari.

3. Calcolare e^A, ove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

si descriva l'insieme delle possibili fattorizzazioni $\mathcal{QR}$ di A con matrici reali.

5. Siano D, $N \in \mathbb{C}^{n,n}$ due matrici permutabili (ossia $DN = ND$). Si provi (per induzione) che

$$(D+N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i N^{k-i}.$$

6. Sia $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dimostrare che

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = O \iff \rho(A) < 1.$$

(*Suggerimento*: Si usi una forma canonica di Jordan di A, e si utilizzi il risultato del precedente esercizio applicato ai blocchi della forma $D + N$.)

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzioni degli esercizi

1. (a) Si vede facilmente che $A^3 = O$, $B^2 = O$, $C^2 = O$, quindi $M^3 = O$. La matrice M ha indice di nilpotenza 3.

   (b) Poiché M è diagonale a blocchi, basta ridurre a forma canonica separatamente ogni matrice. Si ha

$$\mathrm{rg}(A) = 2, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(B) = 1, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(C) = 1, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   quindi la forma canonica di M è

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & O & O \\ O & \tilde{B} & O \\ O & O & \tilde{C} \end{pmatrix}.$$

2. Infatti, ${}^tBB = {}^t(PA)(PA) = {}^tAA$, ed analogamente per C, da cui la conclusione.

3. Si può utilizzare la definizione, oppure si può diagonalizzare A. Con la definizione si osserva subito che

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & 2^{k-1}a \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} = 2^{k-1}A,$$

   da cui

$$e^A = I + \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} \right) A = I + \frac{1}{2}(e^2 - 1)A.$$

   Diagonalizzando A si ottiene rapidamente il risultato ricordando che $A^k = P^{-1}D^kP$.

4. La matrice Q in questo caso è reale. Pertanto le matrici di fase sono matrici diagonali con elementi non nulli ± 1.

5. Banale.

6. Ricordando che $A^k = P^{-1}J^kP$ si ottiene che i blocchi di Jordan hanno elementi non nulli proporzionali a potenze degli autovalori con esponenti che dipendono da k. Questi blocchi sono tutti nulli se e solo se tutti gli autovalori sono, in modulo, minori di 1.