NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

CORSO DI LAUREA...................................

Esame di Calcolo Matriciale, 18 aprile 2005

1. Si consideri la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Provare che $M - I$ è nilpotente e trovarne l'indice di nilpotenza.
   (b) Determinare la forma di Jordan di M.
   (c) Calcolare $\log M$ (*Si ricordi che per* $|x| < 1$ *si ha* $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \cdots$.)

2. Si considerino il quadrilatero $\mathcal{Q} = (ABCD)$ ed il quadrato $\mathcal{K} = (A'B'C'D')$, con
$$A(2,2), \quad B(7,4), \quad C(7,7), \quad D(2,5), \quad A'(0,0), \quad B'(3,0).$$
   Dopo aver osservato che esiste una trasformazione affine del piano che porta $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{K}$, scriverla esplicitamente.

3. Annullare, mediante una matrice di Givens, l'elemento a_{31} della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Si può dedurre da quest'esempio un metodo per semplificare la ricerca degli autovalori di matrici simmetriche?

4. Per ogni $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ si consideri l'applicazione lineare
$$\mathcal{I}_A \colon \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}^{n,n}, \quad X \mapsto AX - XA.$$
   (a) Si dimostri che, se A è diagonalizzabile, con $D = P^{-1}AP$ una sua diagonalizzazione, allora $\mathcal{I}_A$ è simile a $\mathcal{I}_D$, ossia che esiste una trasformazione lineare invertibile $\mathcal{P} \colon \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $\mathcal{I}_D = \mathcal{P}^{-1} \circ \mathcal{I}_A \circ \mathcal{P}$;
   (b) trovare autovalori ed autospazi di $\mathcal{I}_A$ per
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$
   (c) trovare gli autovalori di $\mathcal{I}_D$ (nell'ipotesi in cui A sia diagonalizzabile) e dire se $\mathcal{I}_D$ è un endomorfismo semplice; in particolare descrivere $\operatorname{Ker} \mathcal{I}_D = V(0)$ al variare degli elementi di D.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzioni degli esercizi

1. (a) Si vede facilmente che, posto $r_k = \operatorname{rg}(M-I)^k$, si ha

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 1, \quad r_4 = 0.$$

   Dunque $M - I$ ha indice di nilpotenza 4.

   (b) M ha l'autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 4. Inoltre, ricordando che il numero dei blocchi di Jordan di ordine k è dato da

$$r_{k+1} + r_{k-1} - 2r_k$$

   segue che M ha un solo blocco di Jordan di ordine 4.

   (c) Da quanto precede segue che, posto $X = M - I$ si ha

$$\log M = M - I - \frac{1}{2}(M-I)^2 + \frac{1}{3}(M-I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Basta comporre la traslazione di A in A' con la trasformazione lineare definita da $\vec{AD} \mapsto \vec{A'D'}$ e $\vec{AC} \mapsto \vec{A'C'}$.

3. La matrice cercata è

$$G_{13} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   È possibile operare per similitudini con matrici di Givens per ricondurre la matrice data ad una matrice tridiagonale.

4. (a) Ponendo $\mathcal{P}(X) \overset{\text{def}}{=} PXP^{-1}$, dove $D = P^{-1}AP$ è una diagonalizzazione di A, si ha il risultato cercato.

   (b) Gli autovalori di A sono 1 e 2 (con molt. 2). Essendo $\mathcal{I}_A$ simile a $\mathcal{I}_D$ le due applicazioni hanno gli stessi autovalori. Indicata con $\mathcal{C}$ la base canonica dello spazio delle matrici, e posto $\mathcal{L}_D(X) = DX$, $\mathcal{R}_D(X) = XD$, risulta

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\mathcal{L}_D) = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & 2I & O \\ O & O & 2I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\mathcal{R}_D) = \begin{pmatrix} D & O & O \\ O & D & O \\ O & O & D \end{pmatrix},$$

   dunque la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\mathcal{I}_D)$ è diagonale ed ha come elementi diagonali tutte le possibili differenze tra autovalori di A, dunque, 0, -1, 1.

   (c) Generalizzando, gli autovalori di $\mathcal{I}_A$ sono tutte e sole le possibili differenze tra autovalori di A. In particolare il nucleo ha dimensione tanto maggiore quanto più è alta la molteplicità algebrica degli autovalori. Si noti che gli autovettori di $\mathcal{I}_A$ corrispondono agli autovettori di $\mathcal{I}_D$ tramite la similitudine mostrata.