**NOME e COGNOME**.............................................. **MATRICOLA n**...............

**CORSO DI LAUREA**...................................

# Esame di Calcolo Matriciale, 7 settembre 2006

1. Si determinino i valori dei parametri $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$ per i quali sono simili le seguenti matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

2. Siano dati i punti $P_0(a, 0, 0)$, $P_1(0, 1, 1)$, $P_2(1, 0, -1)$, $P_3(2, 1, 0)$, con $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Si trovi un'equazione parametrica della curva di Bézier che ha come punti di controllo i punti dati.
   (b) Si dica sotto quali condizioni la curva ottenuta è una curva piana.

3. Dati i vettori $U$, $V \in \mathbb{C}^n$ tali che $U^T = (1, 0, 2, -1)$ e $V^T = (0, -1, -1, 1)$, trovare una matrice elementare invertibile $E(\sigma, X, Y)$ tale che $E(\sigma, X, Y)U = V$.

4. Sia $C \in \mathbb{C}^{m,n}$. Si provi che $CC^+C = C$, ove $C^+$ è la pseudoinversa di $C$.

***N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.***

***Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.***

**Soluzione degli esercizi**

1. Condizione necessaria è che $\mathrm{spec}(A) = \mathrm{spec}(B)$. Ora

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^3(c-\lambda), \quad P_B(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2(d-\lambda),$$

quindi $A$ e $B$ hanno gli stessi autovalori $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ se $c = 0$ e $d = 1$. Inoltre deve aversi per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{rg}(A^k) = \mathrm{rg}(B^k), \quad \mathrm{rg}((A-I)^k) = \mathrm{rg}((B-I)^k).$$

Ora $\mathrm{rg}(A^k) = \mathrm{rg}(B^k) = 3$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ (basta verificarlo per $1 \leq k \leq 4$, tenendo conto che $\mathrm{rg}(A^k) \leq \mathrm{rg}(A)$). Mentre

$$\mathrm{rg}(A-I) = \begin{cases} 1 & \text{se } b = 1,\ a = 0, \\ 2 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \mathrm{rg}(B-I) = 2.$$

Quindi, per $(a,b) \neq (0,1)$ si ha $\mathrm{rg}(A-I) = \mathrm{rg}(B-I)$. Inoltre $\mathrm{rg}((A-I)^k) = \mathrm{rg}((B-I)^k) = 1$ per $k \geq 2$. Si conclude che $A$ e $B$ sono simili se e solo se

$$(a,b) \neq (0,1), \quad (c,d) = (0,1).$$

2. (a) Dalla relazione

$$P = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3,$$

con $P(x,y,z)$.

(b) Il piano $x - 3y + 2z + 1 = 0$ contiene i punti dati, dunque la curva di Bézier è piana.

3. Basta prendere

$$\sigma X = \frac{U - V}{Y^* U},$$

con $Y$ tale che $Y^*U \neq 0$, $Y^*V \neq 0$.

4. È l'esercizio 7.5 delle dispense.