NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

CORSO DI LAUREA...................................

Esame di Calcolo Matriciale, 11 gennaio 2005

1. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Calcolare A^{2005}.

   (b) Calcolare e^{At} con $t \in \mathbb{R}$.

2. Determinare la forma canonica di Jordan della matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (Si consiglia di usare un'opportuna decomposizione in blocchi.)

3. (a) Data una matrice hermitiana $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, trovare un algoritmo che, operando per similitudini mediante opportune matrici elementari di Householder (o di Givens), renda A simile ad una matrice tridiagonale.

   (b) Stimare la posizione degli autovalori con i cerchi di Gershgorin prima e dopo il primo passo dell'algoritmo proposto applicato alla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Trovare una curva di Bézier (in rappresentazione parametrica) che approssimi il grafico di $y = \cos x$ nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzioni degli esercizi

1. (a) Si vede facilmente che $A^2 = -I$, quindi

$$A^{2005} = A^{2\cdot 1002+1} = (-I)^{1002}A = A.$$

(b) Poiché $A^2 = -I = (-1)I$ si ha

$$A^{4m} = I, \quad A^{4m+1} = A, \quad A^{4m+2} = -I, \quad A^{4m+3} = -A,$$

quindi

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{2h}}{(2h)!} A^{2h} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{2h+1}}{(2h+1)!} A^{2h+1} \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{2h}(-1)^h}{(2h)!} I + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{2h+1}(-1)^h}{(2h+1)!} A \\ &= (\cos t)I + (\sin t)A. \end{aligned}$$

2. Posto $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, la matrice M si scrive nel modo seguente:

$$M = \begin{pmatrix} B & B & B \\ O & O & I \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

$\det(M - \lambda I) = \lambda^6$, quindi Mè una matrice nilpotente con indice di nilpotenza minore od uguale a 6. Ora

$$M^2 = \begin{pmatrix} O & O & B \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} O & O & B^2 \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix} = O,$$

quindi $\operatorname{Ker} f_M^3 = \mathbb{R}^6$. Segue che $n_1 = \dim \operatorname{Ker} f_M = 3$, $n_2 = \dim \operatorname{Ker} f^2 = 5$, $n_3 = \dim \operatorname{Ker} f^3 = 6$, quindi c'è un blocco di Jordan di ordine 1, uno di ordine 2 ed uno di ordine 3.

3. (a) Sia Q una matrice elementare di Householder che annulla gli elementi della prima colonna di A 'al di sotto' del secondo. Tale matrice ha la forma

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P \end{pmatrix},$$

dove P è la matrice elementare di Householder che agisce sul vettore formato dalla prima colonna di A privata del primo elemento. Allora è immediato vedere che $QAQ^{-1} = QAQ$ è hermitiana. Inoltre, poiché la prima riga di QA è uguale alla prima colonna di A, la matrice $(QA)Q$ ha la prima riga con elementi nulli dal terzo in poi. Pertanto, per simmetria, QAQ soddisfa $a_{1j} = 0$ e $a_{i1=0}$ per i, $j > 2$. Iterando il procedimenti si ottiene l'algoritmo desiderato.

(b) Si calcoli usando il precedente schema e le formule per la matrice di Householder ed i cerchi di Gershgorin.

4. La curva $P(t) = (t, \cos t)$ ha estremi $P_0(-\pi/2, 0)$, $P_3(\pi/2, 0)$ (per $t \in [-\pi/2, \pi/2]$). Le formule usate nel testo si applicano una volta che il parametro sia 'riscalato' nell'intervallo $[0, 1]$, ossia per la curva $P(u) = (\pi u - \pi/2, \cos(\pi u - \pi/2))$. I punti di controllo risultano determinati dalle seguenti posizioni:

$$P'(0) = 3(P_1 - P_0), \qquad P'(1) = 3(P_3 - P_2).$$

Risolvendo le equazioni si ha

$$P_1\Big(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\Big), \qquad P_2\Big(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\Big).$$

Si ottiene la curva

$$P(u) = (1-u)^3\Big(-\frac{\pi}{2}, 0\Big) + 3u(1-u)^2\Big(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\Big) + 3u^2(1-u)\Big(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\Big) + u^3\Big(\frac{\pi}{2}, 0\Big),$$

ove $u \in [0, 1]$.