NOME e COGNOME.. **MATRICOLA n**...............

CORSO DI LAUREA...................................

Esame di Calcolo Matriciale, 13 settembre 2005

1. Si consideri l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato nella base caononica dalla matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Trovare la forma canonica di Jordan per f.
   (b) Trovare una base di Jordan per f.
   (c) Calcolare e^A.
   (d) Trovare la norma spettrale di A.

2. Sia data la matrice
$$\begin{pmatrix} 17 & 2 & 2 \\ 1 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Si dimostri che A ha 3 autovalori distinti (*suggerimento: si usi la teoria della localizzazione degli autovalori*).
   (b) Usando i risultati del punto precedente si dimostri che la matrice A ha 3 autovalori reali.

3. Sia $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, e sia $|||\cdot|||$ una qualunque norma matriciale indotta.
   (a) Si dimostri che vale l'implicazione
$$\lim_{k\to\infty} |||A^k||| = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(A) < 1.$$
   (b) Sia $|||A||| < 1$. Si dimostri che la matrice $I + A$ ha determinante non nullo e che vale la disuguaglianza
$$|||(I+A)^{-1}||| \le \frac{1}{1 - |||A|||}$$

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzione degli esercizi

1. (a) $\det(A-\lambda I) = -(\lambda+2)^2(\lambda-3)$, quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = -2, \quad m_1 = 2, \quad h_1 = 1; \qquad\qquad \lambda_2 = 3, \quad m_2 = 1, \quad h_2 = 1.$$

Inoltre $E(-2) = \mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{Id})^2 = \mathcal{L}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $E(3) = \mathrm{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}) = V(3) = \mathcal{L}(\vec{e}_3)$, e si ha $V = E(-2) \oplus E(-3)$. Indicata $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la base di $E(-2)$, $\mathcal{B}_2 = \{\vec{e}_3\}$ la base di $E(3)$, $f_1 = f|E(-2)$ e $f_2 = f|E(3)$ allora si ha

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2}(f_1) = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M}^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2}(f_2) = (3).$$

Posto $t_1 = f_1 + 2\,\mathrm{Id}$ si vede facilmente che t_1 ha indice di nilpotenza uguale a 2. Poiché $\mathrm{Ker}\, t_1 = \mathcal{L}((1,2))$, possiamo scegliere $\vec{v} = (1,0) \in \mathrm{Ker}\, {t_1}^2 \setminus \mathrm{Ker}\, t_1$. Una base $\mathcal{B}'_1$ di $E(-2)$ è data da

$$\vec{v}_1 = t_1(\vec{v}) = (2,4), \qquad \vec{v}_2 = \vec{v} = (1,0).$$

Rispetto a questa base si ha

$$T'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A'_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

In conclusione, la forma canonica di Jordan è

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D + N.$$

(b) Da quanto precede, una base di Jordan è

$$\vec{v}_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = (2,4,0), \quad \vec{v}_2 = \vec{e}_1 = (1,0,0), \quad \vec{v}_3 = \vec{e}_3.$$

Indicata

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice del cambiamento di base, si ha $\tilde{A} = P^{-1}AP$ e

$$e^A = Pe^{\tilde{A}}P^{-1}, \qquad e^{\tilde{A}} = e^{(D+N)} = e^D \cdot e^N = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

(c) Ricordiamo che la norma spettrale di A vale

$$|||A|||_2 = \sqrt{\lambda_1},$$

dove λ_1 è il massimo autovalore di A^*A. Ora

$$A^*A = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 0 \\ -16 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

quindi lo spettro di A^*A è

$$\mathrm{spec}(A^*A) = \{9, \frac{33 \pm 5\sqrt{41}}{2}\},$$

da cui la conclusione $|||A|||_2 \sim 5.7$

2. (a) Si applichi il secondo teorema di Gershgorin. I 3 cerchi ottenuti dalle colonne della matrice sono disgiunti.
   (b) I tre cerchi precedenti non possono essere accoppiati due a due in modo che contengano un numero complesso ed il suo coniugato. In altre parole, se un cerchio contiene un numero complesso z, ne contiene anche il coniugato, come è facile vedere.

3. (a) È una semplice applicazione del teorema di Hirsch, unita alla disuguaglianza $|||A^k||| \leq |||A|||^k$.
   (b) Sempre per il teorema di Hirsch, nel nostro caso si ha $\rho(A) < 1$, dunque la matrice $I + A$ è invertibile. Si ha

$$(I + A)^{-1}(I + A) = I \quad \Rightarrow \quad (I + A)^{-1} = I - A(I + A)^{-1},$$

   da cui, calcolando le norme di entrambi i membri ed applicando le proprietà delle norme matriciali, si ha la tesi.