NOME e COGNOME.. **MATRICOLA n**...............

CORSO DI LAUREA.................................... **ORALE a marzo** □, **ad aprile** □

Esame di Calcolo Matriciale, 23 marzo 2006

1. Si determini la matrice $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ tale che
$$A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 48 & 61 \end{pmatrix}$$
e che il suo polinomio caratteristico è $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda - 5$.

2. Si consideri la matrice:
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Sapendo che il polinomio caratteristico di B è $(1-\lambda)^4$:
   (a) Calcolare la forma canonica di Jordan J di B.
   (b) Data la matrice P tale che $B = P^{-1}JP$, trovare e^B.

3. Dato il vettore $X = (1, 2, -1, -2)^T$, determinare la matrice di Householder P tale che $PX = (1, 2, \alpha, 0)^T$.

4. Si consideri la matrice
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & t & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ una decomposizione $C = LU$ esiste ed è unica?
   (b) Per i valori di $t \in \mathbb{R}$ diversi da quelli trovati nel punto precedente stabilire se esiste una decomposizione $\Pi C = LU$, ove Π è una matrice di permutazione diversa dall'identità, e calcolarla.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzione degli esercizi

1. Ricordando il teorema di Cayley–Hamilton, si ha $P_A(A) = A^2 - 8A - 5I = O$, dunque $A = -1/8(-A^2 + 5I)$.

2. (a) La matrice $B - I$ ha rango 2, dunque il numero dei blocchi di Jordan è 2. Bisogna determinare le dimensioni di questi blocchi usando l'ordine di nilpotenza di $B - I$. Dal calcolo, il rango di $(B - I)^2$ è 2, quindi l'ordine di nilpotenza di $B - I$ non può essere 2. Pertanto la forma canonica cercata è

$$J = J(1) = \begin{pmatrix} J_1^1 & O \\ O & J_1^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = I + N$$

   (b) È noto che $e^B = P^{-1}e^J P = P^{-1}e^I e^N P = eP^{-1}e^N P$. Tenendo conto del fatto che $N^3 = 0$ si ottiene facilmente il risultato.

3. Si procede come nel metodo di Householder per la fattorizzazione $\mathcal{QR}$. Si consideri il vettore $\tilde{X} = (-1, -2)^T$ e si costruisca la matrice elementare di Householder $\tilde{P} = I - \beta\tilde{V}\tilde{V}^*$ tale che $\tilde{P}\tilde{X} = (\alpha, 0)^T$. Allora la matrice P cercata è la matrice

$$P = \begin{pmatrix} I & O \\ O & \tilde{P} \end{pmatrix},$$

   che è di Householder in quanto $P = I - \beta VV^*$, ove $V = (0, 0, \tilde{V}^T)^T$.

4. (a) Dalla teoria, consizione sufficiente è che $\det C_1 \neq 0$, $\det C_2 \neq 0$. Pertanto, $t \neq 0$.

   (b) Per $t = 0$ la permutazione che rende possibile la decomposizione è lo scambio delle ultime due righe.