NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**...............

CORSO DI LAUREA.................................... **ORALE a dicembre** □, **a gennaio** □

Esame di Calcolo Matriciale, 9 gennaio 2006

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_1 a_2 a_3 \neq 0.$$

   (a) Provare che A ed A' sono simili.

   (b) Determinare le matrici B e C tali che $BA = A'$ e $AC = A'$.

2. Sia $\Phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione del piano così definita:

$$\Phi(x, y) = (x', y'), \quad \begin{cases} x' = 2x - y - xy \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

   Si considerino i punti $P_0(0,0)$, $P_1(1,0)$, $P_2(1,1)$.

   (a) Determinare (anche mediante un grafico) l'immagine dei segmenti P_0P_1 e P_0P_2.

   (b) Dimostrare che la curva di Bézier di secondo grado $P_0^2(t) = (1-t)P_0^1(t) + tP_1^1(t)$ è una parabola (si ricordi che $P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1$ e $P_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2$).

3. Calcolare $\cos(\pi A)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

4. Dire per quali valori di α, $\beta \in \mathbb{R}$ la seguente matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \beta & 0 \\ \beta & 2 & 1 + i\alpha \\ 0 & 1 - i\alpha & 2 \end{pmatrix}$$

   ammette una fattorizzazione $\mathcal{L}\mathcal{L}^*$. Calcolare esplicitamente la fattorizzazione per tali valori.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzione degli esercizi

1. (a) È immediato verificare che $\operatorname{spec} A = \{0\}$, $\operatorname{spec} A' = \{0\}$. Si ha $\operatorname{rg}(A - \lambda I)^k = \operatorname{rg} A^k$ e $\operatorname{rg}(A' - \lambda I)^k = \operatorname{rg}(A')^k$. Quindi A ed A' sono simili se e solo se $\operatorname{rg} A^k = \operatorname{rg}(A')^k$ for all $k \in \mathbb{N}$. Risulta

$$\begin{array}{ll} k = 1 & \operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg} A' \\ k = 2 & \operatorname{rg} A^2 = 2 = \operatorname{rg}(A')^2 \\ k = 3 & \operatorname{rg} A^3 = 1 = \operatorname{rg}(A')^3 \\ k > 3 & \operatorname{rg} A^k = 0 = \operatorname{rg}(A')^k \end{array}$$

   (b) B e C si possono ottenere come prodotto di matrici elementari, del tipo $M_i(\lambda)$, quindi

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

2. (a) Una parametrizzazione sull'intervallo $[0,1]$ del segmento P_0P_1 è $t \mapsto (0,t)$. $\Phi(P_0P_1)$ risulta essere il segmento congiungente i punti $P_0'(0,-1)$ e $P_1'(2,-1)$. Ripetendo il procedimento per P_0P_2 si ottiene che $\Phi(P_0P_2)$ è parametrizzato da

$$t \mapsto (t - t^2, t - 1).$$

   Eliminando il parametro si trova una parabola congiungente i punti $P_0'(0,-1)$ e $P_2'(0,0)$.

   (b) Risulta

$$\begin{aligned} P_0^2(t) &= (1-t)((1-t)P_0 + tP_1) + t((1-t)P_1 + tP_3) \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \end{aligned}$$

   che è la curva $t \mapsto (t^2, t(2-t))$. Eliminando il parametro si ottiene la parabola $4x = (x+y)^2$.

3. A è simmetrica, quindi è diagonalizzabile; perciò esiste una matrice C ortogonale invertibile tale che

$$A = CDC^{-1}, \quad D = \operatorname{diag}(-2,-2,-2,-2)$$

   Allora $\pi A = C(\pi D)C^{-1}$ e $\cos(\pi A) = C\cos(\pi D)C^{-1} = CIC^{-1} = I$.

4. Si ha $\det M_1 = 2 > 0$, $\det M_2 = 4 - \beta^2 > 0$ se e solo se $\beta^2 < 4$ e $\det M_3 = 2(3 - \alpha^2 - \beta^2) > 0$ se e solo se $\alpha^2 + \beta^2 < 3$, dunque A è definita positiva se e solo se $\alpha^2 + \beta^2 < 3$ e $\beta^2 < 3$.

   Il risultato della fattorizzazione è

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}} & \sqrt{2 - \frac{1}{2}\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1 - i\alpha}{\sqrt{2 - \frac{1}{2}\beta}} & \sqrt{\frac{3 - \alpha^2 - \beta^2}{2 - \frac{1}{2}\beta^2}} \end{pmatrix}.$$