NOME e COGNOME.. **MATRICOLA n**..............

CORSO DI LAUREA..................................

Esame di Calcolo Matriciale, 18 aprile 2006

1. Sia data la matrice
$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si determini la forma canonica di Jordan per $a \in \mathbb{R}$.

2. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
   (a) Si localizzino gli autovalori di A.
   (b) Si dimostri che A è invertibile senza calcolare esplicitamente $\det A$.
   (c) Si determini la matrice di Givens G_{13} che annulla l'elemento a_{31} di A.

3. Risolvere il problema dei minimi quadrati per il sistema lineare $AX = B$, dove
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{5}/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
utilizzando il metodo $\mathcal{QR}$.

4. *(Facoltativo.)* Sia $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Si supponga che $\rho(A) < 1$, dove $\rho(A)$ è il raggio spettrale di A. Si dimostri che $\det(I - A) \neq 0$.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzione degli esercizi

1. Si ha
$$\det(B-\lambda\,\mathrm{Id})=(a-\lambda)(1-\lambda)^2,$$
quindi gli autovalori sono $\lambda=a$ e $\lambda=1$ con molteplicità algebrica almeno 2. Ora
$$V(1)=\{(x,y,z)\mid (a-1)x=0,\ x+az=0\}$$
Se $a\neq 0,1$ allora $V(1)=\{(0,h,0)\}$; quindi $\dim V(1)=1$ ed f_a non è semplice. In questo caso la forma canonica di Jordan è
$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&a\end{pmatrix}.$$
Se $a=0$ allora $V(1)=\{(0,k_1,k_2)\}$; quindi $\dim V(1)=2$ ed f_0 è semplice, dunque diagonalizzabile con matrice $\mathrm{diag}(1,1,0)$.

   Se $a=1$, allora $V(1)=\{(h_1,h_2,-h_1)\}$, quindi $\dim V(1)=2$ ed f_1 non è semplice, poiché la molteplicità algebrica di $\lambda=1$ è 3. Allora la forma canonica di Jordan è
$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2. (a) Gli autovalori si trovano nel cerchio
$$\{z\in\mathbb{C}\mid |z-4|\leq 2\}.$$
Ma la matrice è simmetrica, quindi si conclude che gli autovalori si trovano nell'intervallo $[2,6]\subset\mathbb{R}$.

   (b) La dimostrazione segue applicando il teorema della diagonale dominante.

   (c) Basta applicare le formule note. Si ha
$$\psi=1,\quad \cos\varphi=\frac{4}{\sqrt{17}},\quad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{17}},$$
$$G_{13}=\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{17}}&0&-\frac{1}{\sqrt{17}}&0\\0&1&0&0\\\frac{1}{\sqrt{17}}&0&\frac{4}{\sqrt{17}}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
Si verifica immediatamente che $(G_{13}A)_{31}=0$.

3. Si applica il metodo di Householder alla matrice completa del sistema. Come primo passo si cerca di annullare il primo elemento della seconda riga:

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^{(1)} = \frac{1}{9 + 3 \cdot 2}, \quad P^{(1)} = I - \beta^{(1)} V^{(1)} V^{(1)*} = \begin{pmatrix} -2/3 & \sqrt{5}/3 & 0 \\ \sqrt{5}/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{(1)}(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3/2 & 2/3\,(1+\sqrt{5}) \\ 0 & 0 & 1/3\,(-\sqrt{5}+4) \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{(2)} P^{(1)}(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3/2 & 2/3\,(1+\sqrt{5}) \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3\,(-\sqrt{5}+4) \end{array} \right).$$

La soluzione richiesta si ottiene risolvendo il sistema lineare $R_1 X = C_1$, dove

$$R_1 = \begin{pmatrix} -3 & -3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 2/3\,(1+\sqrt{5}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè $(x_1, x_2) = (-2/9\,(1+\sqrt{5}), 0)$

4. Gli autovalori di A cadono all'interno del disco di centro O e raggio 1; allora gli autovalori di $I - A$, per il teorema di Gershgorin, sono diversi da 0. Quindi $I - A$ sarà simile ad una matrice triangolare non singolare, da cui $\det(I - A) \neq 0$.