NOME e COGNOME... **MATRICOLA n**..............

CORSO DI LAUREA.................................. **ORALE a dicembre** □, **a gennaio** □

Esame di Calcolo Matriciale, 16 dicembre 2005

1. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

   (a) Trovre la forma canonica di Jordan di A.

   (b) Calcolare e^A.

   (c) Trovare la norma spettrale di A.

2. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{C}^3$ dotato del prodotto scalare hermitiano
$$\beta\colon V \times V \to \mathbb{C}$$
$$\beta(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \overline{x_1}x_2 + (1-i)\overline{x_1}y_2 + (1+i)\overline{y_1}x_2 + 3\overline{y_1}y_2 + i\overline{y_1}z_2 - i\overline{z_1}y_2 + 2\overline{z_1}z_2,$$
dove $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sono riferiti alla base canonica.

   (a) Indicata con G la matrice associata a β rispetto alla base canonica, si stabilisca se G è (hermitiana) definita positiva.

   (b) La base canonica è ortonormale rispetto al prodotto scalare hermitiano β?

   (c) Localizzare gli autovalori ed i valori singolari di G.

3. Sia data la matrice
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Si descriva l'insieme delle fattorizzazioni (reali e complesse) QR di N.

4. Sia $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ tale che $\det A_k \neq 0$ per $k = 0, \ldots, n-1$. Sia A in forma di Hessenberg superiore, ovvero $a_{ij} = 0$ per $i > j+1$. Si dica che forma assume la matrice L della fattorizzazione $\mathcal{LU}$.

N.B. I procedimenti, le risposte, i calcoli, debbono essere tutti brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Questo foglio va compilato e consegnato insieme a tutti i fogli timbrati.

Soluzione degli esercizi

1. (a) Gli autovalori di A sono le radici di $\lambda^3+1=0$, cioè

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Poiché A ha 3 autovalori distinti, essa è diagonalizzabile e $A = B^{-1}DB$ dove $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ e B è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ alla base di autovettori $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Naturalmente D è anche la forma canonica di Jordan.

(b) Tenendo conto del punto precedente si ha

$$e^A = B^{-1}e^D B \quad \text{dove} \quad e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix}.$$

Per trovare una base di autovettori consideriamo gli autospazi $V(\lambda_h) = \mathcal{L}((\lambda_h, 1, -\lambda_h^2))$. Quindi $\vec{v}_h = (\lambda_h, 1, -\lambda_h^2)$.

(c) Poiché $A^*A = I$, gli autovalori di A^*A sono $\mu_h = 1$, $h = 1, 2, 3$. Quindi $|||A|||_2 = 1$.

2. (a) La matrice associata a β rispetto alla base canonica è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 3 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $G = G^*$ e poiché tutti i determinanti principali sono uguali ad 1 si conclude che G è definita positiva.

(b) La base canonica *non* è ortonormale rispetto a β perché $G \neq I$.

(c) Usando il teorema di Gershgorin si ha

$$\begin{aligned} C_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le r_1\}, & r_1 &= \sqrt{2}, \\ C_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \le r_2\}, & r_2 &= \sqrt{2}+1, \\ C_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \le r_3\}, & r_3 &= 1. \end{aligned}$$

Poiché G è hermitiana gli autovalori λ_i sono reali e risulta $\lambda_i \in [1-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}]$. Poiché G è definita positiva risulta $\lambda_i > 0$ e $\sigma_i \in (0, 4+\sqrt{2}]$ poiché $\lambda_i = \sigma_i$.

3. Si ha

$$V = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{10} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{10}(1+\sqrt{10})},$$

$$Q = I - \beta VV^* = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = QN = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dalla teoria, essendo $\det N \neq 0$, si sa che le possibili coppie Q', R' della fattorizzazione possono essere date dai prodotti QS, S^*R, ove $S = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)$ dove $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = |\beta| = 1$. Pertanto,

$$Q' = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -\alpha & -3\beta \\ -3\alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad R' = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 10\overline{\alpha} & -14\overline{\alpha} \\ 0 & -2\overline{\beta} \end{pmatrix}.$$

Le possibili matrici reali si ottengono scegliendo $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$, e sono 4, di cui solamente una con gli elementi diagonali di R' positivi, cioè

$$Q' = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad R' = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

scegliendo $\alpha = 1 = -\beta$.

4. Dall'algoritmo studiato nella teoria risulta che gli elementi non nulli di L possono essere solo l_{ii} ed $l_{i+1,i}$.