



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA - FACOLTÀ DI SCIENZE

---

Giovanni Calvaruso e Raffaele Vitolo

**ESERCIZI**  
DI  
**GEOMETRIA ED ALGEBRA**

Versione del 20 gennaio 2007

---

ANNO ACCADEMICO 2000-2001

**Informazioni legali:** Quest'opera è un esemplare unico riprodotto in proprio con il metodo Xerox presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce. Sono stati adempiuti gli obblighi previsti dal D. L. L. 31/8/1945 n. 660 riguardanti le pubblicazioni in proprio.

**Nota:** Questo libro viene rilasciato gratuitamente agli studenti della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Lecce ed a tutti quelli che fossero interessati agli argomenti trattati mediante Internet nella convinzione che il patrimonio culturale in esso contenuto debba essere reso disponibile a tutti al minor costo possibile.

Gli autori concedono completa libertà di riproduzione (ma non di modifica) del presente testo per soli scopi personali e/o didattici, ma non a fini di lucro.

**Indirizzo degli autori.**

Giovanni Calvaruso, Raffaele Vitolo,  
Università di Lecce, Dipartimento di Matematica,  
via per Arnesano, 73100 Lecce  
Giovanni.Calvaruso@unile.it  
Raffaele.Vitolo@unile.it

# INDICE

	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Premesse</b>	<b>6</b>
1.1	Matrici e determinanti . . . . .	6
1.2	Sistemi lineari . . . . .	9
1.3	Inversa di una matrice . . . . .	15
1.4	Esercizi di riepilogo . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Geometria analitica</b>	<b>19</b>
2.1	Dipendenza ed indipendenza lineare . . . . .	19
2.2	Prodotto scalare, vettoriale, misto . . . . .	20
2.3	Rette e piani dello spazio . . . . .	23
2.4	Sfere e circonferenze . . . . .	32
2.5	Curve e superfici . . . . .	38
2.6	Coni e cilindri . . . . .	42
2.7	Esercizi di riepilogo . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Spazi vettoriali</b>	<b>51</b>
3.1	Sottospazi vettoriali, lineare indipendenza, basi . . . . .	51
3.2	Applicazioni lineari . . . . .	60
3.3	Autovalori ed autovettori . . . . .	76
3.4	Esercizi di riepilogo . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Strutture metriche</b>	<b>97</b>
4.1	Prodotti scalari . . . . .	97
4.2	Trasformazioni ortogonali . . . . .	104
4.3	Esercizi di riepilogo . . . . .	109

# PREFAZIONE

Con piacere presentiamo questa raccolta di esercizi, curata con competenza e professionalità da G. Calvaruso e R. Vitolo, che hanno tanta esperienza di esercitazioni agli studenti di Matematica, Fisica ed Ingegneria.

Si tratta di esercizi, per la maggior parte, dati a prove d'esame o assegnati durante l'anno. Alcuni sono semplici applicazioni di concetti studiati, altri richiedono intuizione geometrica, sia nel piano sia nello spazio ordinario.

Gli esercizi sono quasi tutti svolti, ma lo svolgimento va visto solo dopo aver provato a risolverli senza aiuto. Sappiamo che la difficoltà maggiore per gli studenti è proprio quella di immaginare la soluzione spaziale e di tradurre il problema geometrico in equazioni: seguire un percorso di soluzione è certamente più comodo ma non aiuta a sviluppare il "saper fare", essenziale in matematica, una disciplina che non può essere studiata in modo passivo. Naturalmente è molto utile ed istruttivo vedere come il docente si è posto di fronte al problema, qual'è stata la sua preoccupazione di rigore e come ha esposto il procedimento, apprezzando l'equilibrio tra le motivazioni ed i calcoli. Negli esami sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva: una eccessiva trascuratezza può essere scambiata come mancanza di rispetto verso chi corregge.

Ringraziamo gli autori di questo testo, i quali si sono sottoposti alla fatica, convinti di fare cosa gradita agli studenti, e, cosa più importante, convinti di contribuire alla formazione matematica di base, utile in ogni circostanza della vita, poiché essa fornisce un allenamento al pensiero razionale e quindi, in ultima analisi, al "ben ragionare".

Lecce, Dicembre 2001

Giuseppe De Cecco  
Rosanna Marinosci  
Domenico Perrone

# INTRODUZIONE

Questa raccolta di esercizi è pensata per gli studenti di Geometria I (Corso di Laurea in Matematica) e di Geometria ed Algebra (Facoltà di Ingegneria) come sussidio nella preparazione delle prove scritte dei suddetti corsi. È stata realizzata utilizzando i contributi dei corsi di esercitazione di Geometria I e Geometria ed Algebra teuti dagli autori, con l'aggiunta di prove scritte assegnate per l'esame di Geometria ed Algebra. La gran parte degli esercizi è corredata da soluzioni.

Si suggerisce agli studenti che utilizzeranno tale raccolta di provare a risolvere autonomamente gli esercizi proposti, confrontando poi il metodo ed i risultati con quelli riportati. È inoltre buona pratica tentare di risolvere gli esercizi con più di un metodo, rendendosi conto di vantaggi e svantaggi di ciascun approccio. Infine, ogni risultato degli esercizi deve essere verificato: solo un controllo approfondito delle soluzioni può dare la certezza della loro validità.

Infine, una raccomandazione fondamentale: la conoscenza della teoria è indispensabile per risolvere gli esercizi. Viceversa, lo svolgimento degli esercizi costituisce il banco di prova dove si può verificare se la teoria è stata veramente compresa. Non serve, tuttavia, svolgere centinaia di esercizi: è sufficiente avere capito a fondo pochi esercizi per ogni argomento al fine di ottenere una perfetta padronanza della materia.

Lecce, dicembre 2001

G. Calvaruso  
R. Vitolo

## **Ringraziamenti.**

Si ringrazia l'Università di Lecce per aver fornito i mezzi per la scrittura e la stampa di questo testo.

Si ringrazia G. Manno per la correzione di numerosi esercizi.

Queste note sono state scritte in  $\text{\LaTeX}2\text{e}$  con l'estensione `amsmath` della American Mathematical Society.

## CAPITOLO 1

# PREMESSE

### 1.1 Matrici e determinanti

**Esercizio 1.1.** *Siano date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Provare che  $A(B + C) = AB + AC$ . Inoltre, calcolare  $2B - C$ .*

SOLUZIONE. Infatti,

$$A(B + C) = A \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dunque  $A(B + C) = AB + AC$ . Inoltre, si ha

$$2B - C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 1.2.** *Siano date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Verificare che  $AB \neq BA$  e dedurre che  $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ .*

SOLUZIONE. Infatti,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre,  $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ , poiché  $AB \neq BA$ .

**Esercizio 1.3.** *Siano date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1/2 & 5 & 1 \\ -1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Provare che  $(AB)^t = B^t A^t$ , e che  $(AB)^t \neq A^t B^t$ .

SOLUZIONE. Infatti,

$$AB = \begin{pmatrix} 3/2 & -7 & 5 \\ 1 & 17/2 & 7 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{quindi} \quad (AB)^t = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 0 \\ -7 & 17/2 & -3 \\ 5 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, essendo

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ -1 & 5 & -1/2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

si ottiene

$$A^t B^t = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 3/2 \\ -3 & 19/2 & 0 \\ 5 & 7 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 1.4.** *Si calcoli  $\det A$ , dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE. Si ha:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} &= 0(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 2 - 3 = -5 \end{aligned}$$

**Esercizio 1.5.** *Verificare con un esempio che  $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ .*

SOLUZIONE. Infatti, si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**Esercizio 1.6.** *Calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*usando il metodo di triangolarizzazione.*

SOLUZIONE. Operando per righe otteniamo

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3/2 & 7/2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 5/2 & 9/2 & 1 \end{array} \right|,$$

dove  $r_2 \mapsto r_2 + 1/2 r_1$ ,  $r_3 \mapsto r_3 - r_1$ ,  $r_4 \mapsto r_4 + 3/2 r_1$ ;

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3/2 & 7/2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 5/2 & 9/2 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3/2 & 7/2 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -4/3 & -7/3 \end{array} \right|,$$

dove  $r_3 \mapsto r_3 + 2/3 r_2$ ,  $r_4 \mapsto r_4 - 5/3 r_2$ ; infine

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3/2 & 7/2 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -4/3 & -7/3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3/2 & 7/2 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -13/5 \end{array} \right|.$$

Dunque risulta  $\det A = +13$ , poiché il determinante di  $A$  è uguale al determinante dell'ultima matrice che è uguale, a sua volta, al prodotto degli elementi diagonali, in quanto matrice triangolare.

**Esercizio 1.7.** *Calcolare il rango della seguente matrice  $B$  al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ :*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE. Si ha, operando per righe,

$$\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che  $\text{rg}(B) \leq 3$  in quanto l'ultima matrice ha una riga nulla. Inoltre, scambiando la colonna 3 con la colonna 4, otteniamo 3 elementi diagonali non nulli  $(1, 2, 1)$ , dunque  $\text{rg}(B) = 3$ .

**Esercizio 1.8.** *Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare di  $k, h \in \mathbb{R}$ :*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ h & 1 & 0 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} k & 0 & -h \\ 0 & 1 & k \\ k & 1 & h \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE. Si ha, operando per righe, e nel caso  $-hk + 1 \neq 0$ :

$$\text{rg}(C) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ 0 & -hk + 1 & 2h \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ 0 & -hk + 1 & 2h \\ 0 & 0 & \frac{3h - h^2k}{-hk + 1} \end{pmatrix}.$$

Ciò implica che, se  $-hk + 1 \neq 0$ , allora:

- $3h - h^2k \neq 0$  implica  $\text{rg}(C) = 3$ , in quanto l'ultima matrice ha gli elementi diagonali non nulli;
- $3h - h^2k = 0$  implica  $\text{rg}(C) = 2$  in quanto abbiamo due elementi diagonali non nulli.

Se  $-hk + 1 = 0$ , si osserva che  $hk = 1$  implica  $h \neq 0$ . Scambiando la seconda riga con la terza si ottiene una matrice con gli elementi diagonali non nulli, dunque  $\text{rg}(C) = 3$ .

Poiché  $\det D = 2kh - k^2$ , se  $k \neq 0$  e  $2h - k \neq 0$  allora  $\text{rg}(D) = 3$ . Per  $k = 0$ ,  $D$  diventa

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

Se  $h \neq 0$ , la seconda e la terza colonna sono linearmente indipendenti, quindi  $\text{rg}(D) = 2$ . Se  $h = 0$ , la seconda colonna è l'unica non nulla, per cui  $\text{rg}(D) = 1$ . Il calcolo del caso  $2h - k = 0$  è lasciato al lettore.

## 1.2 Sistemi lineari

**Esercizio 1.9.** *Si risolva il seguente sistema*

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + y = -1 \end{cases}.$$

**SOLUZIONE.** Si procede con il metodo di eliminazione operando per righe; in particolare, si effettuano le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned} r_2 &\mapsto -1/3 r_1 + r_2 &\Rightarrow &\begin{cases} 3x - 2y = 2, \\ 5/3 y = -5/3, \end{cases} \\ r_1 &\mapsto 6/5 r_2 + r_1 &\Rightarrow &\begin{cases} x = 0, \\ y = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

**Esercizio 1.10.** *Si risolva il seguente sistema*

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 3, \\ -y - 5z = 1, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

**SOLUZIONE.** Si risolve il sistema con il metodo di eliminazione in notazione matriciale.

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 & -3/2 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -7/2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 17/7 \\ 0 & -1 & 0 & 17/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 17/7 \\ 0 & 1 & 0 & -17/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 \end{array} \right), \end{aligned}$$

dunque il sistema ammette l'unica soluzione  $(17/7, -17/7, 2/7)$ .

**Esercizio 1.11.** *Si studi il sistema  $AX = B$ , dove*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**SOLUZIONE.**

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

**Esercizio 1.12.** *Si studi il seguente sistema*

$$\{ 2x - y = 2.$$

SOLUZIONE. Secondo il teorema di Rouché–Capelli, le soluzioni del sistema sono costituite dai vettori somma di una soluzione particolare del sistema con una qualunque soluzione del sistema omogeneo associato.

La coppia  $(1, 0)$  è una soluzione del sistema. Il sistema omogeneo associato è  $\{2x - y = 0$ , che ha le soluzioni  $\{k(1, 2) \mid k \in \mathbb{R}\}$ . Quindi, le soluzioni del sistema costituiscono l'insieme

$$\{(1, 0) + k(1, 2) \mid k \in \mathbb{R}\}.$$

**Esercizio 1.13.** *Si studi il seguente sistema*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ x + y + 2z = 3, \\ 2x + 2y + 3z + t = 7. \end{cases}$$

SOLUZIONE. La matrice del sistema è

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 7 \end{array} \right).$$

Operando per righe

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Quindi, la matrice incompleta ha rango 2 mentre la matrice completa ha rango 3 (si prenda la sottomatrice costituita dalle colonne 2, 3 e 5). Pertanto, per il teorema di Rouché–Capelli, il sistema non ha soluzioni. Questo si può comunque dedurre dalla presenza della condizione impossibile  $0 = 1$  nella terza riga.

**Esercizio 1.14.** *Si studi il seguente sistema*

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4, \\ x + 2z = 3, \\ 3x - 2y + 4z = 5. \end{cases}$$

SOLUZIONE. La matrice associata al sistema lineare è

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \end{array} \right).$$

Operando per righe si ha

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1 \end{array} \right),$$

dove nell'ultima matrice la terza riga si può eliminare in quanto proporzionale alla seconda. Si ottiene quindi

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Pertanto, sia la matrice incompleta che la matrice completa del sistema hanno rango 2. Secondo il teorema di Rouché–Capelli, il sistema ammette quindi  $\infty^1$  soluzioni. Una delle variabili è, dunque, arbitraria: diventa un *parametro*. Scegliamo come parametro  $z$  e poniamo, per questo,  $z = k$ . Le soluzioni sono tutti e soli i vettori del tipo  $(3, 2, 0) + k(-2, -1, 1)$ , con  $k \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 1.15.** *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x - y + z = -1, \\ x - 2y + 2z = -2. \end{cases}$$

SOLUZIONE. La matrice completa del sistema

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

è equivalente per righe al sistema la cui matrice completa è la matrice a scalini

$$\tilde{S} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

dunque  $\text{rg}(\tilde{A}) = \text{rg} \tilde{S} = 2$ , il sistema ammette  $\infty^1$  soluzioni. Per calcolare queste soluzioni si devono ricavare due variabili in funzione della terza, la cui determinazione è arbitraria e pertanto prende il ruolo di *parametro*. Si supponga di ricavare la  $x$  e la  $y$  in funzione della  $z$ . Secondo il metodo di sostituzione previsto nel metodo di Gauss bisogna operare

per righe ricavando una matrice identità di ordine 2 in corrispondenza delle colonne delle due variabili scelte  $x$  ed  $y$ . Quindi, dividendo la seconda riga di  $\tilde{S}$  per  $-3$  e sottraendola alla prima si ottiene il sistema equivalente a quello di partenza la cui matrice completa è

$$\tilde{S}' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Le soluzioni del sistema sono dunque  $(0, k+1, k)$  per ogni  $k \in \mathbb{R}$ , dove è stato posto  $z = k$  per evidenziare il fatto che a  $z$  possono essere assegnati arbitrari valori reali  $k \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 1.16.** *Studiare al variare di  $h \in \mathbb{R}$  il seguente sistema lineare*

$$\begin{cases} x + 2y + hz - t = 1, \\ (h-1)y + (1-h)t = h, \\ x + 3y + 2z - ht = 3. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Operando per righe si ha, nel caso  $h-1 \neq 0$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & h & -1 & 1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h & h \\ 0 & 1 & 2-h & 1-h & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & h & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & h/(h-1) \\ 0 & 0 & 2-h & 2-h & -h/(h-1)+2 \end{array} \right)$$

da cui

1) se  $2-h \neq 0$  allora il rango della matrice incompleta è 3 perchè gli elementi della diagonale principale sono non nulli. Questo implica che anche il rango della matrice completa è 3, poiché non si possono estrarre minori di ordine  $> 3$  da essa. Quindi, il sistema ha  $\infty^1$  soluzioni per ogni valore di  $h$ . Procedendo per righe:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & h & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & h/(h-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/(h-1) \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1-h & 1+h/(h-1) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & h/(h-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/(h-1) \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-h & 1-h/(h-1) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & h/(h-1) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/(h-1) \end{array} \right) \end{aligned}$$

da cui le soluzioni, ponendo  $t = k$ :

$$(x, y, z, t) = ((1-h)k + 1 - h/(h-1), k + h/(h-1), -k - 1/(h-1), k).$$

2) se  $2-h = 0$  allora la terza riga si annulla. Il sistema che risulta compatibile e di rango 2, quindi con  $\infty^2$  soluzioni:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow$$

da cui  $(x, y, z, t) = (-2k_1 - k_2 - 3, k_2 + 2, k_1, k_2)$ , avendo posto  $z = k_1$  e  $t = k_2$ .

Se, invece,  $h - 1 = 0$ , allora si ottiene una condizione impossibile, dunque il sistema non ha soluzioni.

**Esercizio 1.17.** *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2y - z = 0, \\ 2x + 3z = 6. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

SOLUZIONE. Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \left( A \left| \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 6 \end{array} \right. \right).$$

Poiché  $p = \text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) = 2$  il sistema è compatibile ed ammette  $\infty^1$  soluzioni ( $n - p = 3 - 2 = 1$ ). Esso è equivalente al sistema di tipo Cramer

$$\begin{cases} 2y = z, \\ 2x = 6 - 3z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 3, \\ y = t, \\ z = 2t. \end{cases}$$

Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2y - z = 0, \\ 2x + 3z = 0, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

che ha come soluzione  $x = h$ ,  $y = -1/3h$ ,  $z = -1/3h$ . Una soluzione particolare di (1.2.1), che si ottiene ad esempio ponendo  $z = 0$ , è  $(3, 0, 0)$ . Quindi, *tutte* le soluzioni di (1.2.1) sono date da

$$x = h + 3, \quad y = -\frac{1}{3}h, \quad z = -\frac{2}{3}h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Ponendo  $t = -1/3h$ , ci si rende conto immediatamente che gli insiemi

$$\{(-3t + 3, t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \left\{ \left( h + 3, -\frac{1}{3}h, -\frac{2}{3}h \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

coincidono.

**Esercizio 1.18.** *Discutere e risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ -3x + y + 5z = 0, \\ kx + 2y + hz = 1. \end{cases}$$

**SOLUZIONE.** Indicando con  $A$  la matrice incompleta del sistema, si ha  $\det A = 7(h + 2k + 2)$ . Quindi:

$h + 2k + 2 \neq 0$ : esiste l'unica soluzione

$$\left( \frac{h + 4}{7(h + 2k + 2)}, \frac{3h + 5k + 7}{7(h + 2k + 2)}, \frac{1 - k}{7(h + 2k + 2)} \right).$$

$h + 2k + 2 = 0$ : si vede subito che  $\operatorname{rg} A = 2$ . La matrice completa è

$$(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & 0 \\ k & 2 & h & 1 \end{array} \right)$$

e si hanno i seguenti casi:

$k \neq 1$ :  $\operatorname{rg}(A, B) = 3$ , quindi il sistema non ammette soluzioni;

$k = 1$ :  $\operatorname{rg}(A, B) = 2$ , quindi il sistema ammette  $\infty^1$  soluzioni (per il teorema di Rouché–Capelli). *Calcolate esplicitamente queste soluzioni.*

## 1.3 Inversa di una matrice

**Esercizio 1.19.** *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -k \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

*dire per quali valori di  $k$  la matrice  $A$  è invertibile, pensando  $A$*

*a) come matrice reale ( $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ), o*

*b) come matrice complessa ( $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ )*

**SOLUZIONE.** Condizione necessaria e sufficiente affinché  $A$  sia invertibile è che  $\det A \neq 0$ . Calcolando  $\det A$  si ottiene

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -k \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k^2 + 4.$$

Quindi:

a) Se  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , poiché  $k^2 + 4 \neq 0$  per ogni  $k \in \mathbb{R}$ , ne segue che  $A$  è invertibile per ogni valore reale di  $k$ .

b) Se  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , si ha che  $\det A = 0$  se  $k = \pm 2i$ . Quindi,  $A$  è invertibile se e solo se  $k \neq \pm 2i$ .

**Esercizio 1.20.** Calcolare l'inversa  $A^{-1}$  della seguente matrice  $A$  con il metodo della risoluzione contemporanea di sistemi lineari:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE. Si tratta di risolvere contemporaneamente tre sistemi lineari, ognuno con termine noto differente ma avente  $A$  come matrice dei coefficienti. Si ha

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 3 & 7 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 14/11 & 7/11 & 1/11 \\ 0 & 1 & 0 & 6/11 & 3/11 & 2/11 \\ 0 & 0 & 1 & -3/11 & -7/11 & -1/11 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/11 & 1/11 & -3/11 \\ 0 & 1 & 0 & 6/11 & 3/11 & 2/11 \\ 0 & 0 & 1 & -3/11 & -7/11 & -1/11 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/11 & 1/11 & -3/11 \\ 6/11 & 3/11 & 2/11 \\ -3/11 & -7/11 & -1/11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si confronti questo metodo con il metodo dell'aggiunta classica (o metodo di Cramer) per la soluzione di questo stesso problema.

## 1.4 Esercizi di riepilogo

1. Si consideri in  $\mathbb{R}$  la legge di composizione interna

$$a * b = \frac{a + b}{2}.$$

(a) Esiste per  $*$  l'elemento neutro?

(b) Vale  $(a * b)^n = a^n * b^n$ ?

2. Determinare le potenze della matrice  $U = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$  tale che  $u_{ij} = 1$  per ogni  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

3. Provare che sono simili le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$$

4. Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & x \\ 27 & 1 & 8 & x^3 \\ 9 & 1 & 4 & x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$g(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sin x & 0 & 0 \\ 3 & 12 & \pi & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{2} & 5 & \cos x \end{vmatrix} = 0,$$

$$h(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & \lambda \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

5. Se  $A \in \mathbb{R}^{3,3}$  è simmetrica, provare che

$$A^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 0.$$

6. Determinare il rango della seguente matrice al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 2 & 0 & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Considerato il sistema lineare  $AX = B$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

trovare la matrice  $X$ .

8. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare la loro inversa.

*Suggerimento.* Le soluzioni sono

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 36 & -25 & -5 & 9 \\ -7 & 5 & 1 & -2 \\ -8 & 6 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Risolvere il sistema  $AX = B$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

*Suggerimento:*  $\det A = 6$  e l'unica soluzione è  $(-1, 1, -1, -2)$ .

## CAPITOLO 2

# GEOMETRIA ANALITICA

### 2.1 Dipendenza ed indipendenza lineare

**Esercizio 2.1.** Dire se i vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  sono complanari nei seguenti casi:

- a)  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{w} = -\vec{i} - \vec{j}$ ,  
b)  $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{w} = -3\vec{v} - \vec{j} + 4\vec{k}$ .

SOLUZIONE.

a) Riportando come righe di una matrice le componenti dei vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  rispetto alla base  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , si ottiene la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

avente determinante  $3 \neq 0$ . Pertanto, le righe di  $A$ , e quindi i vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , sono linearmente indipendenti, cioè non complanari.

b) La matrice delle componenti di  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  rispetto alla base  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

e  $\det A = 0$ . Pertanto, le righe di  $A$ , e quindi i vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , sono linearmente dipendenti, cioè,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  sono complanari.

**Esercizio 2.2.** Dire per quali valori del parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$  i vettori  $\vec{u} = (1, \lambda, -\lambda)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, 3)$  e  $\vec{w} = (\lambda + 1, 0, 1)$  sono complanari.

SOLUZIONE. La matrice delle componenti dei vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  rispetto alla base  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 \\ \lambda + 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I vettori  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  sono complanari, cioè linearmente dipendenti, se e solo se le colonne delle loro componenti sono linearmente dipendenti, quindi se e solo se  $\det A = 0$ , ossia per  $\lambda = -1/2$ .

**Esercizio 2.3.** *Dati i vettori  $\vec{a} = (2, 1, 2)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{c} = (0, -1, 4)$  e  $\vec{d} = (k, -k, 1)$ , esprimere  $\vec{c}$  come combinazione lineare di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , e determinare  $k \in \mathbb{R}$  affinché  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{d}$  formino una base di  $V_3$ .*

**SOLUZIONE.** La matrice delle componenti dei vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  rispetto alla base  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Poiché  $\det A = 0$ , i vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  sono linearmente dipendenti. Inoltre, le prime due colonne di  $A$  sono linearmente indipendenti, cioè,  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono linearmente indipendenti, e quindi si potrà esprimere  $\vec{c}$  come combinazione lineare di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Siano  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tali che

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \\ \Rightarrow (0, -1, 4) &= \lambda(2, 1, 2) + \mu(1, 1, -1) = (2\lambda + \mu, \lambda + \mu, 2\lambda - \mu) \\ \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu = 0, \\ \lambda + \mu = -1, \\ 2\lambda - \mu = 4. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1, \\ \mu = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto,  $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ .

Affinché  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{d}$  formino una base di  $V_3$ , tali vettori devono essere linearmente indipendenti. La matrice delle loro componenti rispetto a  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  è

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & -k \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo  $\det B = 1 - 7k$ , si ha che  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{d}$  formano una base di  $V_3$  se e solo se  $k \neq 1/7$ .

## 2.2 Prodotto scalare, vettoriale, misto

**Esercizio 2.4.** *Dati i vettori  $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  e  $\vec{v} = -2\vec{j}$ , determinare  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$ ,  $\cos(\vec{u} \wedge \vec{v})$ ,  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .*

SOLUZIONE.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= -2\vec{i} \cdot \vec{j} + 6\vec{j} \cdot \vec{j} - 4\vec{k} \cdot \vec{j} = 6, \\ \|\vec{u}\| &= (\vec{u} \cdot \vec{u})^{1/2} = (1^2 + (-3)^2 + 2^2)^{1/2} = \sqrt{14}, \\ \|\vec{v}\| &= (\vec{v} \cdot \vec{v})^{1/2} = 2, \\ \cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}, \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{k}.\end{aligned}$$

**Esercizio 2.5.** Trovare i vettori di modulo 2 perpendicolari a  $\vec{u} = (1, -2, 1)$  e  $\vec{v} = (0, 1, -1)$ .

SOLUZIONE. Sia  $\vec{x} = (x, y, z)$  un generico vettore di  $V_3$ .

$$\vec{x} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow x - 2y + z = 0,$$

$$\vec{x} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow y - z = 0,$$

$$\|\vec{x}\| = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

quindi le componenti di  $\vec{x}$  verificano il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ y - z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2/\sqrt{3}, \\ y = \pm 2/\sqrt{3}, \\ z = \pm 2/\sqrt{3}. \end{cases}$$

Pertanto, i vettori cercati sono  $\vec{x}_1 = (2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$  e  $\vec{x}_2 = (-2/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})$ .

**Esercizio 2.6.** Trovare il vettore  $\vec{x}$  complanare con  $\vec{u} = (1, -1, 2)$  e  $\vec{v} = (0, 2, -1)$ , e tale che  $\vec{x} \cdot \vec{u} = 0$  e  $\vec{x} \cdot \vec{v} = 2$ .

SOLUZIONE. Il vettore  $\vec{x}$  è combinazione lineare di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , essendo  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  linearmente indipendenti e  $\vec{x}$  complanare a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$ .

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow 0 = a\|\vec{u}\|^2 + b\vec{u} \cdot \vec{v} = 6a - 4b, \\ \vec{x} \cdot \vec{v} = 2 &\Rightarrow 2 = a\vec{u} \cdot \vec{v} + b\|\vec{v}\|^2 = -4a + 5b \\ &\Rightarrow a = 4/7, \quad b = 6/7 \\ &\Rightarrow \vec{x} = (4/7, 8/7, 2/7).\end{aligned}$$

**Esercizio 2.7.** Trovato il valore di  $k \in \mathbb{R}$  per cui i vettori  $\vec{u} = (1, -1, 1)$  e  $\vec{v} = (-3 - k, -k, k + 2)$  sono ortogonali, determinare i vettori  $\vec{x}$ , di norma 3, tali che  $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$ .

SOLUZIONE.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow k = 1.$$

Dato un generico vettore  $\vec{x} = (x, y, z)$ , si ha

$$\vec{u} \wedge \vec{x} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -(y+z)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}.$$

Imponendo  $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$  e  $\|\vec{x}\| = 3$ , si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -y - z = -4, \\ x - z = -1, \\ x + y = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 2, \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 1/3, \\ y = 8/3, \\ z = 4/3. \end{cases}$$

Pertanto, i vettori cercati sono  $\vec{x}_1 = (1, 2, 2)$  e  $\vec{x}_2 = (1/3, 8/3, 4/3)$ .

**Esercizio 2.8.** Dati i vettori  $\vec{u} = (0, 1, -2)$  e  $\vec{v} = (1, -1, 1)$  e  $\vec{w} = (2, 0, 3)$ , trovare l'area del triangolo di lati  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , e il volume del tetraedro di spigoli  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

SOLUZIONE.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \|\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\| = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} |\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-5| = \frac{5}{6}.$$

**Esercizio 2.9.** Dati i vettori  $\vec{u} = (k, 1, 0)$ ,  $\vec{v} = (k, -1, -k)$  e  $\vec{w} = (1, -2k, -2)$ , calcolare  $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$  e dire per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  i tre vettori formano una base di  $V_3$ .

SOLUZIONE.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ k & -1 & -k \\ 1 & -2k & -2 \end{vmatrix} = 3k - 2k^3 = k(3 - 2k^2).$$

I tre vettori sono linearmente indipendenti, e quindi formano una base di  $V_3$ , se e solo se il loro prodotto misto è diverso da 0, cioè se e solo se  $k \neq 0$  e  $k \neq \sqrt{3/2}$ .

## 2.3 Rette e piani dello spazio

Salvo indicazione contraria, in ogni esercizio di questo capitolo considereremo fissato un riferimento ortonormale  $\mathcal{RC}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**Esercizio 2.10.** *Sia data la retta*

$$r: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x + y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

*Calcolarne i parametri direttori.*

**SOLUZIONE.** I suoi parametri direttori sono le soluzioni del sistema omogeneo associato ad  $r$ , ossia

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Questo sistema rappresenta, infatti, la retta parallela ad  $r$  e passante per l'origine (che ha gli stessi parametri direttori di  $r$ ). Quindi, una terna di parametri direttori è  $\vec{v} = (-3, 1, 2)$ .

**Esercizio 2.11.** *Verificare che le seguenti equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 2, \\ z = 2 - \frac{t}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11 - 4t', \\ y = 2, \\ z = t', \end{cases}$$

*rappresentano la stessa retta  $r$ . Chi sono i parametri direttori di  $r$ ? Scrivere equazioni cartesiane di  $r$ .*

**Esercizio 2.12.** *Siano date le due rette*

$$r: \begin{cases} x = z, \\ y = z, \end{cases} \quad r': \begin{cases} x = 2z + 1, \\ y = -z + 2. \end{cases}$$

1. *Si provi che  $r$  ed  $r'$  sono sghembe.*
2. *Si calcoli la distanza tra le due rette.*
3. *Si trovi il piano  $\alpha$  per  $r$  e parallelo ad  $r'$  e si provi che*

$$d(P', \alpha) = d(r, r'),$$

*Dove  $P'$  è un arbitrario punto di  $r'$ .*

**SOLUZIONE.**

1.  $r$  ed  $r'$  non sono parallele e  $r \cap r' = \emptyset$ .

2. Scriviamo la perpendicolare comune alle due rette:

$$(l, m, n) \sim (1, 1, 1) = \vec{r}, \quad (l', m', n') \sim (2, -1, 1) = \vec{r}',$$

$$\vec{r} \wedge \vec{r}' = \vec{n}(2, 1, -3).$$

Sia  $\beta$  il piano per  $r$  e parallelo ad  $\vec{n}$  e  $\beta'$  il piano per  $r'$  parallelo ad  $\vec{n}$ . La retta  $n$  cercata è data da  $n = \beta \cap \beta'$ , con

$$\beta: 4x - 5y + z = 0, \quad \beta': x + 4y + 2z - 9 = 0.$$

Inoltre

$$P_0 = r \cap \beta' = \left( \frac{9}{7}, \frac{9}{7}, \frac{9}{7} \right),$$

quindi  $d(r, r') = d(P_0, P'_0) = 2\sqrt{14}/7$ .

3. Si proceda in modo simile a quanto fatto al punto precedente.

**Esercizio 2.13.** *Scrivere l'equazione del piano  $\alpha$  soddisfacente alle seguenti proprietà:*

- a) *passante per  $A(1, 1, 0)$  e parallelo ai vettori  $\vec{u} = (1, 0, -1)$  e  $\vec{v} = (0, 2, 3)$ ,*
- b) *passante per  $B(0, 1, -1)$  e  $C(3, 2, 1)$  e parallelo a  $\vec{w} = (0, 0, 5)$ ,*
- c) *passante per  $D(1, 1, -1)$  e ortogonale a  $\vec{n} = (1, -1, 2)$ ,*
- d) *piano assiale del segmento  $AB$ , con  $A(1, 1, 0)$  e  $B(0, 1, -1)$*

SOLUZIONE. a) I punti del piano sono tutti e soli i punti  $P(x, y, z)$  tali che il vettore  $P - A$  sia complanare a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , cioè soddisfacenti l'equazione

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

b) Il piano richiesto passa per  $B$  ed è parallelo a  $\vec{w}$  e  $C - B$ , quindi ha equazione

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x - 3y + 3 = 0.$$

c) Il vettore  $\vec{n}$  individua la giacitura del piano, essendo perpendicolare ad esso. Quindi, l'equazione del piano è

$$1(x-1) - 1(y-1) + 2(z+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y + 2z + 2 = 0.$$

d) Il piano assiale del segmento  $AB$ , con  $A(x_1, y_1, z_1)$  e  $B(x_2, y_2, z_2)$ , è il luogo dei punti dello spazio equidistanti da  $A$  e  $B$ , cioè dei punti  $P(x, y, z)$  soddisfacenti l'equazione

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2.$$

Nel nostro caso, con  $A(1, 1, 0)$  e  $B(0, 1, -1)$ , otteniamo

$$\alpha : x + z = 0.$$

**Esercizio 2.14.** *Dati il punto  $P(1, 2, -1)$  e il piano  $\alpha : 2x - y + 3z - 5 = 0$ , determinare*

- a) *Il piano  $\beta$  passante per  $P$  e parallelo ad  $\alpha$ .*
- b) *Il luogo descritto dal punto medio del segmento  $PQ$  al variare di  $Q$  su  $\alpha$ .*
- c) *Il luogo descritto dai punti simmetrici di  $P$  rispetto ai punti di  $\alpha$ .*

SOLUZIONE. a)  $\beta$  ha la stessa giacitura di  $\alpha$ , e passa per  $P$ , quindi ha equazione

$$2(x - 1) - 1(y - 2) + 3(z + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y + 3z + 3 = 0.$$

b) Il generico punto di  $\alpha$  è  $Q(u, 2u + 3v - 5, v)$ , ottenuto rappresentando  $\alpha$  in forma parametrica. Il punto medio  $M$  del segmento  $PQ$  ha equazioni

$$\begin{cases} x = \frac{u+1}{2}, \\ y = \frac{2u+3v-3}{2}, \\ z = \frac{v-1}{2}, \end{cases}$$

da cui, ricavato  $u = 2x - 1$  e  $v = 2z + 1$  e sostituito nella restante equazione del sistema, si ottiene l'equazione  $2x - y + 3z - 1 = 0$ . Quindi, il luogo richiesto è un piano parallelo ad  $\alpha$ .

c) Il generico punto  $P'(x, y, z)$ , simmetrico di  $P$  rispetto al generico punto  $Q(u, 2u + 3v - 5, v)$  di  $\alpha$ , ha coordinate che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = u, \\ \frac{y+2}{2} = 2u + 3v - 5, \\ \frac{z-1}{2} = v, \end{cases}$$

da cui, ricavando  $u$  e  $v$  dalla prima e terza equazione e sostituendo nella seconda, si ottiene

$$2x - y + 3z - 13 = 0.$$

Quindi, il luogo richiesto è ancora un piano parallelo ad  $\alpha$ .

**Esercizio 2.15.** *Rappresentare con equazioni parametriche e cartesiane le seguenti rette:*

- a) *passante per  $A(1, 2, -1)$  e  $B(0, 1, 4)$ ,*
- b) *passante per  $A(1, 2, -1)$  e parallela alla retta  $s : x - 1 = 2y + 3 = 1 - z$ ,*
- c) *passante per  $A(1, 2, -1)$  e parallela ai piani  $\alpha : x + y - 1 = 0$  e  $\beta : 2y + 3 = 0$ .*

SOLUZIONE.

a) La retta richiesta passa per  $A$  ed è parallela al vettore  $A - B = (1, 1, -5)$ , quindi ha equazioni

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-5} \Rightarrow x = y - 1 = \frac{z-4}{-5} = t,$$

cioè ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t + 1, \\ z = -5t + 4. \end{cases}$$

Ricavando  $t$  e sostituendo si ottengono le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ z = -5x + 4. \end{cases}$$

b) La retta richiesta, essendo parallela ad  $s$ , ha gli stessi parametri direttori di  $s$ , cioè  $(2, 1, -2)$ , e inoltre passa per  $A$ , quindi ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t + 2, \\ z = -2t - 1. \end{cases}$$

Ricavando  $t$  ad esempio dalla seconda equazione e sostituendo, si ottengono le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x = 2y - 3, \\ z = -2y + 3. \end{cases}$$

c) Essendo parallela ai piani  $\alpha$  e  $\beta$ , la retta richiesta è parallela alla retta intersezione di tali piani, cioè  $r : x + y - 1 = 2y + 3 = 0$ , che ha parametri direttori  $(0, 0, 1)$ . Pertanto, la retta richiesta ha equazioni

$$\text{parametriche: } \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 2t - 1, \end{cases} \quad \text{e cartesiane: } \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

**Esercizio 2.16.** *Determinare l'equazione del piano  $\alpha$  passante per  $A(3, 2, 1)$  e contenente la retta  $r : y + z - 1 = x + 2y - z = 0$ .*

SOLUZIONE. Il fascio di piani contenenti la retta  $r$ , in forma non omogenea, ha equazione

$$\mathcal{F}(r) : y + z - 1 + k(x + 2y - z) = 0.$$

Tra i piani di tale fascio, quello cercato passa per  $A$ . Imponendo l'appartenenza di  $A$  a tale piano, si ottiene

$$2 + 1 - 1 + k(3 + 4 - 1) = 0,$$

da cui,  $k = -1/3$ , e quindi l'equazione del piano richiesto è

$$y + z - 1 - 1/3(x + 2y - z) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y - 4z + 3 = 0.$$

**Esercizio 2.17.** *Trovare la retta  $r$ , passante per  $P(1, 2, 3)$ , complanare ad  $s : x + y - 3 = 2x + z - 2 = 0$ , e parallela al piano  $\alpha : 2x + y - z - 1 = 0$ .*

SOLUZIONE. La retta  $r$  si può ottenere come intersezione dei piani  $\beta$ , contenente  $P$  ed  $s$ , e  $\gamma$ , parallelo ad  $\alpha$  e passante per  $P$ . Il piano  $\beta$  appartiene al fascio di piani contenenti la retta  $s$

$$\mathcal{F}(s) : x + y - 3 + k(2x + z - 2) = 0,$$

e passa per  $P$ , per cui si ottiene  $k = 0$ , e quindi  $\beta : x + y - 3 = 0$ . Il piano  $\gamma$ , essendo parallelo ad  $\alpha$ , ha un'equazione del tipo

$$\gamma : 2x + y - z + d = 0.$$

Imponendo l'appartenenza di  $P$  a  $\gamma$ , si ottiene  $d = -1$ , e quindi  $\gamma : 2x + y - z - 1 = 0$ . In conclusione,  $r$  è data da

$$r : x + y - 3 = 2x + y - z - 1 = 0.$$

**Esercizio 2.18.** *Verificare che le rette  $r : x + 2y + z - 1 = x - 3z + 3 = 0$  ed  $s : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = z$  sono parallele, e trovare l'equazione del piano  $\pi$  che le contiene.*

SOLUZIONE. Scritte in forma parametrica,  $r$  ed  $s$  hanno equazioni

$$r : \begin{cases} x = 3t - 3, \\ y = 2 - 2t, \\ z = t, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 2 - 2t, \\ z = t, \end{cases}$$

per cui, sia  $r$  che  $s$  hanno parametri direttori  $(3, -2, 1)$ , e sono quindi parallele. Troviamo il piano contenente  $r$  ed  $s$  come piano contenente  $r$  ed un fissato punto  $S(1, 2, 0)$  appartenente ad  $s$  (si ottiene per  $t = 0$ ). Il fascio di piani per  $r$  ha equazione

$$\mathcal{F}(r) : x + 2y + z - 1 + k(x - 3z + 3) = 0,$$

e il piano cercato passa per  $S$ , da cui  $k = -1$ , e quindi l'equazione di  $\pi$  è

$$\pi : y + 2z - 2 = 0.$$

**Esercizio 2.19.** In un riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(Oxyz)$  si considerino il punto  $A(0, 1, 2)$  e la retta

$$r: x - 2z - 3 = 0, \quad y + z + 1 = 0.$$

1. Determinare il piano  $\alpha$  passante per  $A$  ed ortogonale ad  $r$ .
2. Posto  $H = r \cap \alpha$  e verificato che  $C(0, 0, 1)$  appartiene ad  $\alpha$ , determinare un punto  $D$  tale che  $H, A, D, C$  siano nell'ordine i vertici consecutivi di un parallelogramma  $\Gamma$ .
3. Trovare l'area di  $\Gamma$ .

SOLUZIONE.

1. I parametri direttori di  $r$  sono proporzionali a  $(2, -1, 1)$ , quindi

$$\alpha: 2(x - 0) - (y - 1) + (z - 2) = 0,$$

cioè  $\alpha: 2x - y + z - 1 = 0$ .

2. Si verifica immediatamente che  $C \in \alpha$ ; infatti  $2 \cdot 0 - 0 + 1 - 1 = 0$ . Equazioni parametriche di  $r$  sono  $x = 2t + 3, y = -t - 1, z = t$ , per cui  $H = r \cap \alpha = (1, 0, -1)$ . Posto  $D(x, y, z)$  imponiamo che  $\vec{AD} = \vec{HC}$ . Ora

$$\vec{HC} = (-1, 0, 2), \quad \vec{AD} = (x, -1 + y, -2 + z),$$

per cui  $x = -1, y = 1, z = 4$ , quindi  $D(-1, 1, 4)$ .

3. Indicata con  $\mathcal{A}$  l'area richiesta si ha

$$\mathcal{A} = \|\vec{HA} \wedge \vec{HC}\| = \|2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.$$

**Esercizio 2.20.** Verificare che le rette

$$r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

sono sghembe, trovare l'equazione del piano  $\alpha$  contenente  $r$  e parallelo ad  $s$ , la retta di minima distanza e la minima distanza di  $r$  ed  $s$ .

SOLUZIONE. Per provare che  $r$  ed  $s$  sono sghembe, proviamo che non sono né incidenti né complanari. Dalle equazioni di  $r$  ed  $s$  si ricava che i loro parametri direttori sono rispettivamente  $(-4, -3, 1)$  e  $(3, -3, 1)$ , che non sono paralleli, quindi  $r$  ed  $s$  non sono parallele.

Mettendo a sistema le equazioni di  $r$  ed  $s$ , si ottiene un sistema incompatibile, in quanto le equazioni  $y + 3z = 0$  e  $y + 3z - 2 = 0$  sono incompatibili, per cui  $r$  ed  $s$  non hanno punti in comune, quindi non sono incidenti.

Il piano  $\alpha$  appartiene al fascio di piani contenenti  $r$ ,

$$\mathcal{F}(r) : x - y + z + k(y + 3z) = 0, \quad \Rightarrow \quad x + (k - 1)y + (3k + 1)z = 0,$$

ed è parallelo ad  $s$ , per cui i suoi parametri di giacitura individuano un vettore perpendicolare ai parametri direttori di  $s$

$$\Rightarrow 0 = (1, k - 1, 3k + 1) \cdot (3, -3, 1) = 7.$$

Non essendo tale condizione verificata per nessun valore di  $k$ ,  $\alpha$  è proprio il piano escluso dalla rappresentazione non omogenea del fascio  $\mathcal{F}(r)$ , ossia  $\alpha : y + 3z = 0$ .

Scritte  $r$  ed  $s$  in forma parametrica, si ricava che il generico punto di  $r$  è  $R(-4t, -3t, t)$ , e il generico punto di  $s$  è  $S(3t' - 1, -3t' + 2, t')$ , per cui  $S - R = (4t + 3t' - 1, 3t - 3t' + 2, t' - t)$ . La retta di minima distanza tra  $r$  ed  $s$  passa per quei particolari punti  $R$  ed  $S$  tali che  $(S - R) \perp r$  e  $(S - R) \perp s$ , da cui si ricavano le condizioni

$$\begin{cases} (4t + 3t' - 1, 3t - 3t' + 2, t' - t) \cdot (-4, -3, 1) = 0, \\ (4t + 3t' - 1, 3t - 3t' + 2, t' - t) \cdot (3, -3, 1) = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene  $t = -4/35, t' = 17/35$ , da cui  $R(16/35, 12/35, -4/35)$  ed  $S(16/35, 19/35, 17/35)$ , la retta di minima distanza è  $35x - 16 = 21y - 7z - 8 = 0$ , e la minima distanza di  $r$  ed  $s$  è  $\|S - R\| = \sqrt{2/5}$ .

**Nota.** L'esercizio si poteva risolvere più rapidamente notando fin dall'inizio (osservando i sistemi di  $r$  ed  $s$ ) che  $r$  ed  $s$  sono contenute nei due piani paralleli  $y + 3z = 0$  ed  $y + 3z - 2 = 0$ . La distanza tra questi due piani è uguale alla minima distanza tra le rette.

**Esercizio 2.21.** Dato il piano  $\alpha : x + 2y - z + 5 = 0$ , determinare

a) il fascio di rette del piano  $\alpha$  passanti per  $A(-1, -2, 0) \in \alpha$ ;

b) il fascio improprio di rette del piano  $\alpha$  parallele al piano  $\beta : 2x + y - z - 1 = 0$ .

**SOLUZIONE.** a) Basta considerare una retta  $r$  passante per  $A$  e incidente  $\alpha$ , il fascio di rette cercato sarà allora dato da tutte le rette ottenute intersecando  $\alpha$  con il generico piano del fascio passante per  $r$ . Essendo  $A(-1, -2, 0)$ , ad esempio possiamo prendere  $r : x + 1 = y + 2 = 0$ , controllando che sia incidente  $\alpha$ , cioè che  $\alpha \cap r = \{A\}$ , che è verificata.

Il fascio di piani contenenti  $r$  è

$$\mathcal{F}(r) : x + 1 + k(y + 2) = 0,$$

per cui il fascio di rette cercato ha equazioni

$$\begin{cases} x + 1 + k(y + 2) = 0, \\ x + 2y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

b) Il fascio di rette cercato si ottiene intersecando  $\alpha$  con il fascio improprio di piani

paralleli a  $\beta$ , per cui ha equazioni

$$\begin{cases} 2x + y - z + k = 0, \\ x + 2y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 2.22.** In un riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(Oxyz)$  si considerino i seguenti piani:

$$\alpha: x + 2y + z = 1, \quad \beta: x + y + z = 3, \quad \gamma: x + hy + z = 2 \quad (h \in \mathbb{R}).$$

1. Determinare  $h$  in modo tale che  $\alpha, \beta, \gamma$  appartengano ad uno stesso fascio proprio, ed in tal caso trovare la retta asse del fascio.
2. Determinare  $h$  in modo tale che le rette  $r = \alpha \cap \beta$  ed  $s = \beta \cap \gamma$  siano parallele.
3. Trovare il punto  $P'_0$ , simmetrico di  $P_0(-1, 0, 1)$  rispetto ad  $\alpha$  (nella simmetria ortogonale).

SOLUZIONE.

1. I piani  $\alpha, \beta, \gamma$  appartengono allo stesso fascio proprio se e solo se si intersecano in una stessa retta, ovvero se il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ x + y + z = 3, \\ x + hy + z = 2, \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & h & 1 & 2 \end{array} \right),$$

(è compatibile ed) ammette  $\infty^1$  soluzioni, cioè  $\text{rg}(A) = \text{rg}(\tilde{A}) = 2$ . Dal calcolo (che si può effettuare col metodo di riduzione) risulta  $\text{rg}(A) = 2$  per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , mentre  $\text{rg}(\tilde{A}) = 2$  se e solo se  $h = 3/2$ .

La retta asse del fascio è

$$r: \begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ x + y + z = 3, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r: \begin{cases} x = t, \\ y = -2, \\ z = 5 - t. \end{cases}$$

2. I parametri direttori di  $r$  sono  $(1, 0, -1)$ , mentre quelli di  $s$  sono  $(1 - h, 0, h - 1)$  per  $h \neq 1$ . In tal caso il vettore  $(1 - h, 0, h - 1)$  è proporzionale a  $(1, 0, -1)$ , quindi le rette sono parallele per ogni  $h \neq 1$ .

3. La retta per  $P_0$  e perpendicolare ad  $\alpha$  (che ha parametri di giacitura  $(1, 2, 1)$ ) è

$$n: \begin{cases} x = t - 1, \\ y = 2t, \\ z = t + 1. \end{cases}$$

Ora  $P'_0 \in n$  ed il punto medio  $H$  di  $P_0\vec{P}'_0$  deve appartenere ad  $\alpha$ , quindi

$$H\left(\frac{t-2}{2}, t, \frac{t+2}{2}\right) \in \alpha \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quindi  $P'_0(-2/3, 2/3, 4/3)$ .

**Esercizio 2.23.** In un riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(Oxyz)$  si considerino la retta  $r$  ed il piano  $\alpha$

$$r: x = -y = z, \quad \alpha: x - y + 3z = 2.$$

1. Trovare la retta  $r'$  proiezione ortogonale di  $r$  su  $\alpha$ .
2. Determinare l'angolo  $\widehat{r\alpha}$ .
3. Dire se esistono piani passanti per  $r$  e paralleli ad  $\alpha$ .

SOLUZIONE.

1. Se  $\beta$  è il piano per  $r$  e perpendicolare ad  $\alpha$ , allora  $r' = \alpha \cap \beta$ . Ora, il piano  $\beta(k)$ , variabile nel fascio di piani di asse  $r$ , ha equazione

$$\beta(k): x + y + k(x - z) = 0 \Rightarrow (1+k)x + y - kz = 0.$$

I parametri di giacitura di  $\alpha$  sono proporzionali a  $(1, -1, 3)$ , quindi  $\beta(k)$  è perpendicolare ad  $\alpha$  se e solo se i vettori  $(1, -1, 3)$  e  $(1+k, 1, -k)$  sono ortogonali, da cui  $k = 0$  e quindi  $\beta(0) = \beta: x + y = 0$ . Ne segue

$$r': x + y = 0, \quad x - y + 3z = 2.$$

2. I parametri direttori di  $r$  (a meno di un fattore di proporzionalità) sono  $(1, -1, 1)$  e quelli di  $r'$  sono  $(-3, 3, 2)$ , quindi

$$\cos \widehat{r\alpha} = |\cos \widehat{rr'}| = \frac{|-3 - 3 + 2|}{\sqrt{1+1+1} \sqrt{9+9+4}} = \frac{4}{\sqrt{3} \sqrt{22}},$$

oppure, direttamente,

$$\sin \widehat{r\alpha} = \frac{|1 + 1 + 3|}{\sqrt{1+1+1} \sqrt{1+1+9}} = \frac{5}{\sqrt{3} \sqrt{11}}.$$

3. Il piano  $\beta(k)$  è parallelo ad  $\alpha$  se i vettori  $(1+k, 1, -k)$  e  $(1, -1, 3)$  sono proporzionali. Si vede immediatamente che il sistema  $1+k = \rho$ ,  $1 = -\rho$ ,  $-k = 3\rho$  è incompatibile, quindi non esistono piani verificanti la condizione richiesta.

**Esercizio 2.24.** Dire se nel fascio di piani  $\mathcal{F}$  di asse

$$s: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

esiste un piano contenente la retta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - 2z = 1 \end{cases}.$$

SOLUZIONE. I piani del fascio  $\mathcal{F}$  passano tutti per la retta  $s$ . Ora  $r \cap s = \emptyset$  ed  $r$  non è parallela ad  $s$ , quindi  $r$  ed  $s$  sono sghembe. Ne segue che non esiste alcun piano (in particolare del fascio  $\mathcal{F}$ ) che le contiene entrambe.

## 2.4 Sfere e circonferenze

**Esercizio 2.25.** Scrivere l'equazione della sfera  $S$  avente centro nel punto  $C(1, 2, 0)$  e soddisfacente ad una delle seguenti condizioni:

- $S$  è tangente al piano  $\pi : x - y + z - 1 = 0$ ;
- $S$  interseca il piano  $\pi : x - y + z - 1 = 0$  secondo una circonferenza di raggio  $r = 1$ ;
- $S$  è tangente alla retta  $s : x - z + 2 = y - 1 = 0$ . Trovare inoltre la circonferenza  $\gamma$ , di centro  $C$  e tangente ad  $s$ .

SOLUZIONE. Essendo noto il centro di  $S$ , si deve solo determinarne di volta in volta il raggio  $R$ .

a)  $R = d(C, \pi) = 2/\sqrt{3}$ , applicando la formula per la distanza punto-piano. Di conseguenza, come sfera di centro  $C$  e raggio  $R$ ,  $S$  ha equazione

$$S : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4/3.$$

b) Il centro  $C'$  della circonferenza  $\gamma = S \cap \pi$  coincide con la proiezione di  $C$  su  $\pi$ , per cui

$$d(C, C') = d(C, \pi) = 2/\sqrt{3}.$$

Il raggio  $R$  si ottiene allora mediante il teorema di Pitagora, come ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti  $d(C, C')$  e  $r$ . Quindi,  $R = \sqrt{7/3}$ , per cui

$$S : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 7/3.$$

c) Essendo  $S$  tangente ad  $s$ ,  $R$  coincide con la distanza tra  $C$  ed  $s$ . Il piano passante per  $C$  e perpendicolare ad  $s$  è

$$\alpha : x + z - 1 = 0$$

(ha come parametri di giacitura i parametri direttori di  $s$ , e passa per  $C$ ). L'intersezione di  $\alpha$  ed  $s$  è  $P(-1/2, 1, 3/2)$ , e

$$R = d(C, s) = d(C, P) = \sqrt{\frac{11}{2}},$$

per cui  $S$  ha equazione

$$S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{11}{2}.$$

Risulta  $\gamma = S \cap \beta$ , dove  $\beta$  è il piano passante per  $C$  ed  $s$ .  $\beta$  appartiene al fascio di piani contenenti  $s$ ,

$$\mathcal{F}(s) : x - z + 2 + k(y - 1) = 0,$$

e passa per  $C$ , per cui  $k = -3$ ,  $\beta : x - 3y - z + 5 = 0$ , e quindi

$$\gamma : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{11}{2}, \\ x - 3y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 2.26.** *Scrivere l'equazione della sfera  $S$  tangente l'asse  $y$  nel punto  $A(0, 1, 0)$  e la retta  $r : x - y + 1 = x - z - 1 = 0$  nel punto  $B(0, 1, -1)$ , e l'equazione del piano  $\alpha$ , tangente ad  $S$  nel punto  $A$ .*

**SOLUZIONE.** Il centro  $C$  di  $S$  si ottiene come intersezione di tre piani  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$ , con  $\pi_1$  piano per  $A$  e perpendicolare all'asse  $y$ ,  $\pi_2$  piano passante per  $B$  e perpendicolare ad  $r$ , e  $\pi_3$  piano assiale del segmento  $AB$ . Quindi,  $\pi_1 : y = 1$ ,  $\pi_2 : x + y + z = 0$  (vedi Es. 2.13), mentre  $\pi_3$  è il luogo dei punti  $P(x, y, z)$  tali che  $d(A, P) = d(P, B)$ , per cui si ottiene  $\pi_3 : 2z + 1 = 0$ . Mettendo a sistema le equazioni di  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$ , si ottiene  $C(-1/2, 1, -1/2)$ . Il raggio  $R$  di  $S$  si può calcolare ad esempio come distanza tra  $C$  ed  $A$ , per cui  $R = \sqrt{1/2}$ , e si ottiene

$$S : (x + 1/2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1/2)^2 = 1/2,$$

cioè

$$S : x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + z + 1 = 0.$$

Poiché **in una sfera la direzione radiale è sempre ortogonale al piano tangente**, il piano  $\alpha$  si ottiene come piano passante per  $A$  ed ortogonale al vettore  $\vec{AC} = (1/2, 0, 1/2)$ . Quindi,

$$\alpha : 1/2x + 1/2z = 0 \quad \Rightarrow \quad x + z = 0.$$

**Esercizio 2.27.** *Dati la sfera  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 5 = 0$  e il piano  $\pi : x + y - z - 3 = 0$ , verificare che  $d(C, \pi) < R$ , dove  $C$  ed  $R$  sono rispettivamente il centro e il raggio di  $S$ , e trovare centro e raggio della circonferenza  $\gamma = S \cap \pi$ .*

**SOLUZIONE.** Dall'equazione di  $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$  ricaviamo che il centro  $C$  ha coordinate  $C(\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2)$ , e raggio  $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta} = 1$ . Poiché  $d(C, \pi) = 1/\sqrt{3}$ , risulta  $d(C, \pi) < R$ , e quindi ha senso considerare la circonferenza  $\gamma = S \cap \pi$ .

Il centro  $C'$  di  $\gamma$  coincide con l'intersezione di  $\pi$  con la retta  $r$ , passante per  $C$  e perpendicolare a  $\pi$ , ossia

$$r : x - 1 = y - 1 = -z - 2.$$

Quindi,  $C'(2/3, 2/3, -5/3)$  e, applicando il teorema di Pitagora, il raggio  $R'$  di  $\gamma$  è dato da

$$R' = \sqrt{R^2 - d(C, C')^2} = \sqrt{2/3}.$$

**Esercizio 2.28.** *Scrivere le equazioni della circonferenza  $\gamma$  passante per i punti  $A(1, 1, -1)$ ,  $B(2, 1, 1)$  e  $C(1, 2, -1)$ .*

**SOLUZIONE.** La circonferenza  $\gamma$  si ottiene intersecando il piano  $\pi$ , contenente  $A$ ,  $B$  e  $C$ , con la sfera  $S$  avente  $\gamma$  stessa come circonferenza di raggio massimo.

Il piano  $\pi$  si trova come piano passante per tre punti non allineati:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2x - z - 3 = 0.$$

Il centro  $Q$  di  $\gamma$  (e di  $S$ ) si può determinare come intersezione dei piani  $\pi$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , con  $\alpha$  piano assiale di  $AC$ , e  $\beta$  piano assiale di  $AB$ . Procedendo come in Es. 2.13), otteniamo

$$\alpha : 2y - 3 = 0, \quad \beta : 2x + 4z - 3 = 0,$$

da cui segue che  $\{Q\} = \pi \cap \alpha \cap \beta$  è il punto  $Q(3/2, 3/2, 0)$ . Il raggio di  $S$  (e  $\gamma$ ) si può calcolare ad esempio come

$$R = d(Q, A) = \sqrt{3/2},$$

per cui, l'equazione di  $S$  è

$$S : (x - 3/2)^2 + (y - 3/2)^2 + z^2 = 3/2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y + 3 = 0.$$

In conclusione, le equazioni di  $\gamma$  sono

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y + 3 = 0, \\ 2x - z - 3 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 2.29.** *Determinare la retta  $r$ , tangente in  $A(1, 1, -1)$  alla circonferenza  $\gamma$  dell'Es. 2.28*

SOLUZIONE. Poiché  $\gamma \subset \pi$ , anche  $r \subset \pi$ . Inoltre,  $r \subset \alpha$ , dove  $\alpha$  è il piano tangente ad  $S$  in  $A$ . Essendo  $A(1, 1, -1)$  e  $\vec{QA} = (1/2, 1/2, 1)$ , si ha (cfr. Es. 2.26)

$$\alpha : x + y + 2z = 0.$$

Pertanto, le equazioni di  $r = \pi \cap \alpha$  sono

$$\gamma : \begin{cases} 2x - z - 3 = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 2.30.** *Trovare la sfera di raggio minimo, tangente alla rette sghembe  $r : y + 1 = z - 1 = 0$  ed  $s : x + 2y - 1 = z - 2y - 2 = 0$ .*

SOLUZIONE. Sia  $t$  la retta di minima distanza tra  $r$  ed  $s$ ,  $A = t \cap r$  e  $B = t \cap s$ . La sfera cercata è la sfera di diametro  $\|\vec{AB}\|$ , cioè avente centro nel punto medio  $C$  di  $\|\vec{AB}\|$ , e passante per tali punti.

Il generico punto di  $r$  è  $R(t, -1, 1)$ , il generico punto di  $s$  è  $S(1 - 2t', t', 2t' + 2)$ , i parametri direttori di  $r$  ed  $s$  sono dati rispettivamente da  $\vec{r} = (1, 0, 0)$  e  $\vec{s} = (-2, 1, 2)$ . I punti  $R$  ed  $S$  sono quelli in cui si realizza la minima distanza, cioè  $R = A$  e  $S = B$ , quando  $(S - R) \cdot \vec{r} = (S - R) \cdot \vec{s} = 0$ , da cui si ricavano le condizioni

$$\begin{cases} 1 - 2t' - t = 0, \\ 2t + 9t' + 1 = 0 \end{cases}$$

(vedi anche Es. 2.20). Risolvendo il sistema, si ottiene  $t = 11/5$ ,  $t' = -3/5$ , per cui  $A(11/5, -1, 1)$  e  $B(11/5, -3/5, 4/5)$ . Il centro della sfera è quindi il punto medio  $C(11/5, -4/5, 9/10)$ , il raggio è  $\|\vec{CA}\| = \sqrt{1/20}$ . Pertanto, la sfera cercata ha equazione

$$\left(x - \frac{11}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{10}\right)^2 = \frac{1}{20}.$$

**Esercizio 2.31.** *Siano dati il punto  $P_0(-1, 0, 1)$  e la retta*

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

*Determinare la sfera  $\Sigma$  avente centro su  $r$  e passante per i punti  $O$  e  $P_0$ .*

SOLUZIONE.  $\Sigma$  ha centro  $C(t, -2, 5 - t)$  e raggio  $R = \|\vec{CO}\| = \|\vec{CP}_0\|$ , quindi

$$t^2 + 4 + (5 - t)^2 = (t + 1)^2 + 4 + (4 - t)^2 \quad \Rightarrow \quad t = 2.$$

Allora  $C(2, -2, 3)$ ,  $R = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$  e

$$\Sigma: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 17.$$

**Esercizio 2.32.** In un riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(Oxyz)$  si consideri la sfera

$$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 16 = 0.$$

1. Trovare l'equazione della circonferenza massima  $\tilde{\gamma}$  parallela al piano  $\tau: x - y + 2z + 2 = 0$ .
2. Trovare l'equazione della retta  $r$  tangente nel punto  $P_0(2, -2, 2)$  alla circonferenza  $\gamma = \Sigma \cap \pi$ , dove  $\pi$  è il piano  $\pi: x + y = 0$ .
3. Trovare la minima distanza della sfera  $\Sigma$  dal piano  $\sigma: x - y + 3 = 0$ .
4. Scrivere equazioni cartesiane della proiezione ortogonale di  $\gamma$  sul piano  $xz$ .

SOLUZIONE.

1. La sfera  $\Sigma$  ha centro  $C(2, -2, 3)$  e raggio  $R = 1$ . Un piano parallelo a  $\tau$  ha equazione  $x - y + 2z + h = 0$ ; esso passa per  $C$  se  $2 + 2 + 6 + h = 0$ , cioè  $h = -10$ . Quindi il piano cercato è

$$\tilde{\tau}: x - y + 2z = 10,$$

e quindi  $\tilde{\gamma} = \Sigma \cap \tilde{\tau}$ .

2. Chiaramente  $r = \alpha \cap \pi$ , dove  $\alpha$  è il piano tangente in  $P_0$  a  $\Sigma$ . Posto

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 16 = 0$$

si ha  $f_x = 2x - 4$ ,  $f_y = 2y + 4$ ,  $f_z = 2z - 6$ , che calcolate nel punto  $P_0$  danno  $f_x^0 = 0$ ,  $f_y^0 = 0$ ,  $f_z^0 = -2$ , quindi  $\alpha: z = 2$  e

$$r: \begin{cases} x + y = 0, \\ z = 2. \end{cases}$$

3. La (minima) distanza  $d(\Sigma, \sigma)$  di  $\Sigma$  da  $\sigma$  è uguale a  $d(C, \sigma) - R$ , dove

$$d(C, \sigma) = \left| \frac{2 + 2 + 3}{\sqrt{1 + 1}} \right| = \frac{7}{\sqrt{2}}.$$

Quindi  $d(\Sigma, \sigma) = 7/\sqrt{2} - 1$ .

4. La circonferenza  $\gamma$  può essere rappresentata come

$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 - 8x - 6z + 16 = 0, \\ y = -x. \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta il cilindro passante per  $\gamma$  con generatrici parallele all'asse  $y$  (ortogonale al piano  $xz$ ), quindi la proiezione ortogonale sul piano  $xz$  è

$$\gamma': \begin{cases} 2x^2 + z^2 - 8x - 6z + 16 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 2.33.** In un riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(Oxyz)$  si consideri la circonferenza  $\tilde{C} = \Sigma \cap \alpha$ , dove

$$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 1 = 0, \quad \alpha: x - y + z = 0.$$

1. Scrivere l'equazione cartesiana della sfera  $\tilde{\Sigma}$  avente  $\tilde{C}$  come circonferenza massima.
2. Determinare i piani paralleli ad  $\alpha$  e tangenti a  $\Sigma$ .
3. Determinare i piani passanti per l'asse  $y$  e tangenti a  $\Sigma$ .

SOLUZIONE.

1. Se  $\tilde{C}$  e  $\tilde{R}$  sono rispettivamente il centro ed il raggio di  $\tilde{C}$ , allora la sfera richiesta  $\tilde{\Sigma}$  avrà centro  $\tilde{C}$  e raggio  $\tilde{R}$ . Posto  $C =$  centro di  $\Sigma$  e  $R =$  raggio di  $\Sigma$ , si ha

$$C(1, 0, 2), \quad R = \sqrt{1 + 0 + 4 - 1} = 2, \\ d(C, \alpha) = \left| \frac{1 - 0 + 2}{\sqrt{3}} \right| = \sqrt{3} < 2, \quad \tilde{R} = \sqrt{R^2 - d(C, \alpha)^2} = \sqrt{4 - 3} = 1.$$

La retta  $n$  per  $C$  ed ortogonale ad  $\alpha$  ha equazioni parametriche

$$x = t + 1, \quad y = -t, \quad z = t + 2,$$

quindi

$$\tilde{C} = n \cap \alpha, \quad t + 1 + t + t + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{C}(0, 1, 1),$$

allora

$$\tilde{\Sigma}: (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

2. I piani richiesti saranno paralleli ad  $\alpha$  e passanti per i punti  $Q$  e  $Q^*$  intersezioni di  $n$  con  $\Sigma$ .

$$\begin{aligned} (t+1)^2 + t^2 + (t+2)^2 - 2(t+1) - 4(t+2) + 1 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3t^2 - 4 &= 0 \Rightarrow t = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ Q\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\right), & \quad Q^*\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} + 1, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}} + 2\right). \end{aligned}$$

I piani richiesti sono

$$x - y + z + h = 0, \quad \text{con } h = \pm \frac{6}{\sqrt{3}} - 3 = \pm 2\sqrt{3} - 3.$$

Oppure più semplicemente si possono determinare i piani del tipo  $\alpha_h: x - y + z + h = 0$  con  $d(C, \alpha_h) = 2$ , cioè

$$\left| \frac{h+3}{\sqrt{3}} \right| = 2.$$

3. Il fascio di piani di asse  $y$  ha equazione  $\lambda x + \mu z = 0$ . Indicato con  $\varphi$  il generico piano del fascio, i piani richiesti sono quelli per cui  $d(C, \varphi) = R$ , cioè

$$\left| \frac{\lambda + 2\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \right| = 2 \Rightarrow 3\lambda^2 - 4\lambda\mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = \frac{4}{3}\mu.$$

I piani richiesti sono  $z = 0$  e  $4x + 3z = 0$ .

## 2.5 Curve e superfici

**Esercizio 2.34.** Sia data la superficie  $\Sigma$  di equazioni parametriche

$$x = -u^3 + 3vu^2, \quad y = 2u + 2v, \quad z = e^u(v - 1).$$

1. Scrivere equazioni parametriche di  $\mathcal{L}$ , linea coordinata  $u$  di equazione  $v = 1$ , e riconoscere che essa è piana.
2. Trovare le coordinate del versore tangente ad  $\mathcal{L}$  nel punto  $P_0(4, 0, 0)$ , supponendo la curva orientata nel verso del parametro  $u$  decrescente.
3. Provare che il piano tangente a  $\Sigma$  in  $Q_0(0, -2, -2)$  contiene una retta appartenente a  $\Sigma$ .

SOLUZIONE.

1.  $\mathcal{L}$ :  $x = -u^3 + 3u^2$ ,  $y = 2u + 2$ ,  $z = 0$   
 è piana poiché appartiene al piano  $z = 0$ .

2. Il vettore tangente nel generico punto di  $\mathcal{L}$  ha componenti

$$x_u = -3u^2 + 6u, \quad y_u = 2, \quad z_u = 0.$$

Quindi, il vettore  $\vec{w}$  tangente nel punto  $P_0$ , che si ottiene per  $u = -1$ , è

$$\vec{w} = (x_u^0, y_u^0, z_u^0) = (-9, 2, 0), \quad \|\vec{w}\| = \sqrt{81 + 4} = \sqrt{85},$$

e il versore (con l'orientazione richiesta) è  $(9/\sqrt{85}, -2/\sqrt{85}, 0)$ .

3. Consideriamo le derivate parziali dell'equazione di  $\Sigma$

$$\begin{aligned} x_u &= -3u^2 + 6uv, & y_u &= 2, & z_u &= e^u(v-1), \\ x_v &= 3u^2, & y_v &= 2, & z_v &= e^u, \end{aligned}$$

che calcolate nel punto  $Q_0$ , che si ottiene per  $u = 0$  e  $v = -1$ , sono

$$(x_u^0, y_u^0, z_u^0) = (0, 2, -2), \quad (x_v^0, y_v^0, z_v^0) = (0, 2, 1).$$

Il piano tangente richiesto è  $x = 0$ . Ora

$$\Sigma \cap yz = \{x = 0, y = 2v, z = v - 1\} \cup \{x = 0, y = 8v, z = e^{3v}(v - 1)\}$$

e la prima curva è una retta essendo il parametro  $v$  lineare.

**Esercizio 2.35.** In un riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(Oxyz)$  si consideri la curva  $\mathcal{C}$  di equazioni parametriche

$$\mathcal{C}: x = e^t, \quad y = e^{-t} \cos t, \quad z = \sin^2 t.$$

1. Provare che  $\mathcal{C}$  è contenuta nella superficie  $\Sigma: z = 1 - x^2 y^2$ .
2. Trovare il versore tangente a  $\mathcal{C}$  nel punto  $P_0$ , corrispondente al parametro  $t = 0$ .
3. Determinare i versori normali a  $\Sigma$  in  $P_0$ .

SOLUZIONE.

1. Si verifica immediatamente che ogni punto di  $\mathcal{C}$  appartiene a  $\Sigma$ , cioè

$$1 - x^2 y^2 = 1 - e^{2t} \cdot e^{-2t} \cos^2 t = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t = z.$$

2. Si ha

$$x' = e^t, \quad y' = -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t, \quad z' = 2 \cos t \sin t,$$

quindi  $x'(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $z'(0) = 0$ , da cui  $\vec{t} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ .

3. Equazioni parametriche di  $\Sigma$  sono

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 1 - u^2 v^2.$$

Il punto  $P_0(1, 1, 0)$  si ottiene per  $u = 1$ ,  $v = 1$ . Quindi il piano tangente è

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Il suo vettore giacitura è proporzionale a  $(2, 2, 1)$ , quindi  $\vec{n} = \pm(2/3, 2/3, 1/3)$ .

**Esercizio 2.36.** In un riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(Oxyz)$ , data la retta  $r: x = -y = z$ , determinare la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare intorno ad  $r$  la curva

$$\mathcal{C}: x = 2t, \quad y = t^2 - 1, \quad z = t^2 - 1.$$

SOLUZIONE. Il generico punto di  $\mathcal{C}$  è  $P(2t, t^2 - 1, t^2 - 1)$ . Il piano passante per  $P$  e perpendicolare ad  $r$ , di parametri direttori  $(1, -1, 1)$ , è

$$1(x - 2t) - 1(y - t^2 + 1) + 1(z - t^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y + z = 2t.$$

La sfera di centro  $O$  e raggio  $\|\vec{OP}\|$  è

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4t^2 + 2(t^2 - 1)^2,$$

da cui l'equazione cartesiana della superficie richiesta è

$$8(x^2 + y^2 + z^2) = (x - y + z)^4 + 16.$$

**Esercizio 2.37.** Con riferimento alla circonferenza  $\tilde{\mathcal{C}}$  dell'esercizio 2.33, determinare equazioni cartesiane della curva  $\tilde{\mathcal{C}}'$  proiezione ortogonale di  $\tilde{\mathcal{C}}$  sul piano  $xz$ .

SOLUZIONE. La circonferenza  $\tilde{\mathcal{C}}$  può essere rappresentata anche così

$$\begin{cases} 2x^2 + 2z^2 + 2xz - 2x - 4z + 1 = 0, \\ y = x + z. \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta il cilindro con generatrici parallele all'asse  $y$  (ortogonale al piano  $xz$ ), quindi la proiezione ortogonale sul piano  $xz$  è

$$\begin{cases} 2x^2 + 2z^2 + 2xz - 2x - 4z + 1 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 2.38.** In un riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(Oxyz)$  si consideri il piano  $\alpha: x - y + 9z = 1$  e la curva

$$\mathcal{C}: x = t^2 + 1, \quad y = -t, \quad z = t^2 - 1.$$

1. Provare che  $\mathcal{C}$  è una curva piana e trovare il piano  $\beta$  che la contiene.
2. Trovare l'equazione della retta  $r$  tangente a  $\mathcal{C}$  nel punto  $P_0(2, 1, 0)$  e verificare che essa appartiene a  $\beta$ .
3. Determinare la distanza di  $P_0$  dal piano  $\alpha$ .
4.  $\mathcal{C}$  è una circonferenza?

SOLUZIONE.

1. Cerchiamo il piano  $\beta: ax + by + cz + d = 0$  con  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  che contenga  $\mathcal{C}$ . Dunque deve essere un'identità

$$a(t^2 + 1) - bt + c(t^2 - 1) + d = 0,$$

da cui, per il principio d'identità dei polinomi, deve aversi

$$a + c = 0, \quad b = 0, \quad a - c + d = 0,$$

da cui  $c = -a$  e  $d = -2a$ . Il piano richiesto è

$$\beta: x - z - 2 = 0.$$

2.  $P_0$  si ottiene per  $t = -1$ . I parametri direttori della tangente sono proporzionali a

$$x'(-1) = -2, \quad y'(-1) = -1, \quad z'(-1) = -2,$$

e quindi la retta tangente è

$$r: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + z, \\ z = 2y - 2. \end{cases}$$

Ponendo  $z = u$  si ottengono equazioni parametriche di  $r$

$$r: x = 2 + u, \quad y = 1 + \frac{u}{2}, \quad z = u,$$

che permettono di verificare facilmente che  $r \subset \beta$ ; infatti

$$(2 + u) - u - 2 = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

3.  $d(P_0, \alpha) = \left| \frac{2-1+0-1}{\sqrt{1+1+81}} \right| \Rightarrow P_0 \in \alpha$ .
4. Una circonferenza è una curva con punti reali al finito. Mentre per  $t \rightarrow \infty$ , il punto  $P$  va all'infinito; quindi  $\mathcal{C}$  non può essere una circonferenza.

## 2.6 Coni e cilindri

**Esercizio 2.39.** *Sia data la curva*

$$\mathcal{C}: \quad x = t^3, \quad y = t^3 - t, \quad z = t^2.$$

1. *Scrivere l'equazione del cilindro avente generatrici di direzione  $\vec{w}(1, 1, 1)$  e passante per  $\mathcal{C}$ .*
2. *Proiettare la curva  $\mathcal{C}$  sul piano  $yz$  parallelamente alla direzione individuata da  $\vec{w}$ .*
3. *Proiettare sempre la stessa curva  $\mathcal{C}$  nel piano  $x = y + 1$  dal punto  $V(1, 1, 1)$ .*

SOLUZIONE.

1. La generatrice generica ha equazioni

$$\frac{x - t^3}{1} = \frac{y - t^3 + t}{1} = \frac{z - t^2}{1} = h,$$

quindi equazioni parametriche del cilindro sono

$$\Gamma: \quad x = t^3 + h, \quad y = t^3 - t + h, \quad z = t^2 + h, \quad (t, h) \in \mathbb{R}^2.$$

Per ottenere l'equazione cartesiana, basta eliminare i parametri  $t$  ed  $h$

$$\Gamma: \quad (x - y)^3 - (x - y)^2 + z - x = 0.$$

2. Ponendo  $x = 0$  nelle equazioni parametriche si ha  $h = -t^3$  e quindi

$$\mathcal{C}': \quad x = 0, \quad y = -t, \quad z = t^2 - t^3,$$

oppure in forma cartesiana

$$\mathcal{C}': \quad x = 0, \quad z = y^2 + y^3.$$

3. Si ha immediatamente

$$\begin{aligned} \mathcal{K}: \quad x &= 1 + v(t^3 - 1), \quad y = 1 + v(t^3 - t - 1), \quad z = 1 + v(t^2 - 1) \\ \mathcal{C}': \quad x &= 1 + t^2 - \frac{1}{t}, \quad y = t^2 - \frac{1}{t}, \quad z = 1 + t - \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

**Esercizio 2.40.** Scrivere l'equazione del cono  $\Sigma$  di vertice  $V(1, 2, -1)$  le cui generatrici formano un angolo  $\alpha = \pi/6$  con il vettore  $\vec{u}(2, 1, 2)$ .

SOLUZIONE.

$$P(x, y, z) \in \Sigma \Leftrightarrow \cos \left( \widehat{P\vec{V}\vec{u}} \right) = \cos \frac{\pi}{6}.$$

Il secondo membro dà

$$(x-1)2 + (y-2)1 + (z+1)2 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} \cdot 3 \frac{1}{2},$$

da cui elevando al quadrato entrambi i membri

$$(2x + y + 2z - 2)^2 = \frac{9}{4}((x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2).$$

**Esercizio 2.41.** Trovare il cono di vertice  $V(-1, 2, 2)$  e generatrici che formano un angolo di  $\pi/4$  con la retta

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 2x - z + 4 = 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Si proceda come nel precedente esercizio, ricavando prima un vettore di direzione della retta  $r$ .

**Esercizio 2.42.** Determinare il cilindro  $\Sigma$  con generatrici parallele ad  $\vec{u}(1, 1, -1)$  e circoscritto alla sfera  $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 2 = 0$ .

SOLUZIONE.

*I metodo.* Sia  $P(\alpha, \beta, \gamma) \in \Sigma$ . Consideriamo la generica retta  $g_P$  passante per  $P$ ; questa è tangente alla sfera  $S$  se il sistema  $g_P \cap S$  ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} x = \alpha + t, \\ y = \beta + t, \\ z = \gamma - t, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 2 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo le prime tre equazioni nell'ultima si ottiene una equazione di secondo grado in  $t$ . Richiedendo che questa abbia il discriminante uguale a 0 si ottiene

$$(\alpha + \beta - \gamma - 3)^2 - 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha + 4\gamma + 2) = 0.$$

La precedente condizione è necessaria e sufficiente affinché  $P(\alpha, \beta, \gamma) \in \Sigma$ ; quindi, può essere presa come equazione del cilindro sostituendo  $(\alpha, \beta, \gamma)$  con  $(x, y, z)$ .

*II metodo.* Sia  $\pi$  il piano passante per il centro  $C(1, 0, -2)$  di  $S$  e perpendicolare a  $\vec{u}(1, 1, -1)$ . Allora  $\Sigma$  ha direttrice la circonferenza  $\sigma = S \cap \pi$ . Si ha

$$\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 2 = 0, \\ (x-1) + y - (z+2) = 0. \end{cases}$$

Dunque, se  $P(\alpha, \beta, \gamma) \in \Sigma$ , e considerando la generica retta  $g_P$  passante per  $P$ , le equazioni parametriche del cilindro sono

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha + 4\gamma + 2 = 0, \\ \alpha + \beta - \gamma - 3 = 0, \\ x = \alpha + t, \\ y = \beta + t, \\ z = \gamma - t \end{cases}$$

(le prime due equazioni sono la condizione di appartenenza di  $P$  a  $\sigma$ ). Ricavando  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  dalle ultime tre equazioni e sostituendole nella seconda si può ricavare  $t$  in funzione di  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . Sostituendo  $t$  nelle ultime tre equazioni si ottengono  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  in funzione delle sole  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . Sostituendo queste nella prima equazione si ottiene l'equazione cartesiana del cilindro.

*Confrontate le due soluzioni!*

**Esercizio 2.43.** *Data la curva*

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = t^3. \end{cases}$$

*determinare la proiezione ortogonale di  $\gamma$  sul piano  $\pi_{xy}$ .*

**SOLUZIONE.** Il punto generico di  $\gamma$  è  $P(t, t^2, t^3)$ . Sia  $\Sigma$  il cilindro avente direttrice  $\gamma$  e generatrice perpendicolare a  $\pi_{xy}$ , ovvero parallela a  $(0, 0, 1)$ . L'equazione parametrica del cilindro è

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = t^3 + t', \end{cases}$$

e l'equazione cartesiana si ottiene eliminando  $t$  e  $t'$ :  $y = x^2$ . Pertanto la curva  $\gamma'$  proiezione di  $\gamma$  ha equazione

$$\begin{cases} y = x^2, \\ z = 0, \end{cases}$$

e risulta una parabola.

**Esercizio 2.44.** *Data la circonferenza*

$$\sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + z = 0, \\ x - y + z = 0, \end{cases}$$

*determinare  $\sigma'$  proiezione ortogonale sul piano  $\pi_{xy}$ .*

**SOLUZIONE.**

*I metodo.* Si consideri il punto generico  $P(\alpha, \beta, \gamma) \in \sigma$ . Il cilindro che ha direttrice  $\sigma$  e asse parallelo all'asse  $z$  ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\alpha + \gamma = 0, \\ \alpha - \beta + \gamma = 0, \\ x = \alpha, \\ y = \beta, \\ z = t. \end{cases}$$

Ricavando  $\gamma$  in funzione di  $\alpha$  e  $\beta$  nella seconda equazione, ed usando la terza e la quarta equazione, si ha l'equazione del cilindro:  $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 5x + y = 0$ . Intersecando con il piano coordinato  $z = 0$  si ha l'equazione della curva cercata, che è un'ellisse.

*II metodo.* Eliminare  $z$  tra le equazioni di  $\sigma$ . Questo è possibile solo perchè si sta proiettando ortogonalmente su di un piano coordinato.

**Esercizio 2.45.** *Si consideri la curva  $\mathcal{C}$  dell'esercizio 2.38. Trovare equazioni cartesiane di  $\mathcal{C}'$ , proiezione di  $\mathcal{C}$  sul piano  $\alpha$  parallelamente alla direzione  $\vec{v} = (2, 1, 0)$ .*

**SOLUZIONE.** Sia  $P(t^2 + 1, -t, t^2 - 1)$  il punto generico di  $\mathcal{C}$ . La retta per  $P$  di direzione  $\vec{v}$  ha equazioni parametriche

$$x = t^2 + 1 + 2v, \quad y = -t + 1v, \quad z = t^2 - 1 + 0v, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Quindi chiamando i parametri  $t$  e  $v$  si ottiene il cilindro  $\Gamma$  per  $\mathcal{C}$  e di direzione  $\vec{v}$ :

$$\Gamma: \left( \frac{x - 2y - z - 2}{2} \right)^2 = z + 1,$$

da cui

$$\mathcal{C}': \left( \frac{x - 2y - z - 2}{2} \right)^2 = z + 1, \quad x - y + 9z = 1.$$

**Esercizio 2.46.** *Sia data la seguente circonferenza:*

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y = x. \end{cases}$$

1. *Proiettare  $\mathcal{C}$  ortogonalmente sul piano  $xz$ . Descrivere la curva proiezione.*
2. *Qual è la proiezione ortogonale di  $\mathcal{C}$  sul piano  $x = 0$  e sul piano  $z = 0$ ?*

**SOLUZIONE.**

1.  $\mathcal{C}$  può essere rappresentata anche dal sistema equivalente

$$\mathcal{C}: \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1, \\ y = x. \end{cases}$$

In tal caso  $\mathcal{C}$  è pensata come intersezione del cilindro  $\Gamma: 2x^2 + z^2 = 1$  con il piano  $\alpha: y = x$ . La proiezione ortogonale di  $\mathcal{C}$  sul piano  $y = 0$  sarà

$$\mathcal{C}': \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Si vede immediatamente che  $\mathcal{C}'$  non è una circonferenza, ma un'ellisse, com'è intuitivo, essendo i piani  $y = x$  e  $y = 0$  non paralleli tra loro.

2. Si tenga presente che il piano  $y = x$  è ortogonale al piano  $z = 0$ .

**Esercizio 2.47.** *Trovare la superficie  $\Sigma$  generata dalla rotazione intorno all'asse  $z$  della retta*

$$r: \quad x = 1, \quad y = 2z,$$

e trovare i meridiani di  $\Sigma$ .

SOLUZIONE. Essendo  $r$  sghemba con l'asse  $z$ ,  $\Sigma$  non sarà un cono. Equazioni parametriche di  $r$  sono

$$x = 1, \quad y = 2u, \quad z = u.$$

Quindi, posto  $A(0, 0, 0)$  e  $(l, m, n) \sim (0, 0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \tau: \quad & z = u, \\ S: \quad & x^2 + y^2 + z^2 = (1 - 0)^2 + (2u - 0)^2 + (u - 0)^2, \end{aligned}$$

cioè

$$\mathcal{P}: \begin{cases} z = u, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 5u^2, \end{cases}$$

ed eliminando il parametro

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 1,$$

che è una superficie algebrica di ordine 2.

Troviamo ora i meridiani di  $\Sigma$ . Il fascio di piani di asse  $z$  è  $x + ky = 0$ , quindi i meridiani sono

$$\mathcal{M}: \begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 1, \\ x + ky = 0. \end{cases}$$

Per  $k = 0$  si ha il meridiano

$$\mathcal{C}: \quad x = 0, \quad y^2 - 4z^2 = 1,$$

che è un'iperbole.

*Provare che se si fa ruotare la curva  $\mathcal{C}$  intorno all'asse  $z$  si ottiene la stessa superficie.*

**Esercizio 2.48.** *Trovare il piano tangente in  $P_0(1, 1, 1)$  alla superficie  $\Sigma: y = xz$ .*

SOLUZIONE.  $\Sigma$  è rappresentata dalle equazioni cartesiane  $f(x, y, z) = y - xz = 0$ , quindi

$$f_x = -z, \quad f_y = 1, \quad f_z = -x.$$

Poiché  $f_y = 1$  in ogni punto  $P \in \Sigma$ , la superficie ha tutti i punti regolari. Ora

$$f_x^0 = -1, \quad f_y^0 = 1, \quad f_z^0 = -1,$$

quindi il piano tangente richiesto è  $x - y + z - 1 = 0$ .

*Ritrovare l'equazione cartesiana del piano tangente utilizzando la rappresentazione parametrica*

$$x = u, \quad y = u^2v, \quad z = uv.$$

**Esercizio 2.49.** *Si consideri la superficie  $\Sigma: y = xz$ , il punto  $P_0(1, 1, 1)$  ed il piano  $\tau$ , tangente a  $\Sigma$  in  $P_0$ . Provare che la curva  $\mathcal{C} = \Sigma \cap \tau$  è costituita da due rette.*

SOLUZIONE. Infatti

$$\begin{cases} y = xz, \\ x - y + z - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = xz, \\ (x - 1)(1 - z) = 0. \end{cases}$$

Quindi le due rette, appartenenti a  $\Sigma$  e  $\tau$ , sono

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = z, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1, \\ y = x. \end{cases}$$

**Esercizio 2.50.** *Determinare il profilo di  $\Sigma: y = xz$  visto dal punto  $P_0(0, 1, 0) \notin \Sigma$ .*

SOLUZIONE. Si tratta di trovare la curva  $\mathcal{L} = \Sigma \cap K$ , dove  $K$  è il cono di vertice  $P_0$  con generatrici tangenti a  $\Sigma$  (cioè il cono circoscritto a  $\Sigma$ ).

La generica retta per  $P_0$ :  $x = lt$ ,  $y = mt + 1$ ,  $z = nt$  è tangente a  $\Sigma$  se l'equazione  $lnt^2 - mt - 1 = 0$  ha due radici coincidenti, cioè se  $m^2 - 4ln = 0$ . Tenendo conto che  $l : m : n = x : (y - 1) : z$ , il cono  $K$  avrà equazione

$$(y - 1)^2 - 4xz = 0.$$

## 2.7 Esercizi di riepilogo

1. Siano  $\alpha$  un piano perpendicolare al vettore  $\vec{a} = (1, -2, 0)$  e  $\beta$  un piano perpendicolare al vettore  $\vec{b} = (3, -1, -1)$ .

(a) Verificare che i vettori

$$\vec{u}_1 = (2, 1, 0), \quad \vec{u}_2 = \left( \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -2 \right),$$

sono paralleli ad  $\alpha$ .

(b) Si trovino i vettori  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  paralleli a  $\beta$  le cui proiezioni ortogonali su  $\alpha$  siano rispettivamente  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$ .

2. Siano dati i vettori

$$\vec{u} = (2, 1, 3), \quad \vec{v}_1 = (0, -1, -1), \quad \vec{v}_2 = (1, 0, 2), \quad \vec{w} = (1, 1, 1).$$

(a) Trovare la giacitura  $\vec{a}$  individuata da  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  (cioè un vettore perpendicolare al piano individuato da  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ ).

(b) Decomporre  $\vec{w}$  secondo una retta  $r$  parallela ad  $\vec{u}$  ed un piano  $\alpha$  di giacitura  $\vec{a}$ .

3. Si considerino i seguenti vettori

$$\vec{u} = \lambda \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{v} = \vec{i} - \lambda \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{w} = -2\vec{i} + \mu \vec{k},$$

dove  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

(a) Trovare per quali valori di  $\lambda, \mu$  esistono vettori  $\vec{x}$  tali che

$$\vec{u} \wedge \vec{x} + \vec{x} \wedge \vec{v} = \vec{w}.$$

(b) Determinare, quando possibile, le componenti di  $\vec{x}$  per  $\lambda = 1$ .

4. Siano dati i seguenti vettori di  $\mathbf{V}_3$  riferiti alla base  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ :

$$\vec{v}_1 = (2 - h, 4 - 2h, 2 - h), \quad \vec{v}_2 = (h, 3h, 2h), \quad \vec{v}_3 = (1 - h, 1 - 2h, h).$$

- Determinare per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  il vettore  $\vec{w} = (1 - 2h, 1 - h, -5h)$  è combinazione lineare dei vettori  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ .
- Esaminare il caso  $h = 0$ .

5. Si dimostri che considerati tre vettori qualsiasi  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ , sussiste l'identità

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.$$

L'operazione  $\wedge$  è associativa?

6. Determinare le equazioni delle bisettrici delle rette

$$r : x - 1 = y - z = 0, \quad s : y = 1 = z.$$

*Suggerimento:* si ricordi che se  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  sono i *versori* associati alle rette, allora  $\vec{r} + \vec{s}$  e  $\vec{r} - \vec{s}$  danno le direzioni delle bisettrici.

7. Detta  $r$  la retta passante per i punti  $A(2, -1)$ ,  $B(-1, 2)$ , trovare il punto  $P$  simmetrico dell'origine  $O$  rispetto ad  $r$ . Verificare che il quadrilatero  $AOBP$  è un rombo, e trovarne l'area.

8. Si consideri il piano  $\alpha$  contenente il triangolo  $T$  di vertici

$$A(1, 0, 0), \quad B(0, \sqrt{2}, 1), \quad C(-1, 1/\sqrt{2}, 1).$$

- (a) Determinare l'angolo  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ) tra il piano  $\alpha$  e il piano coordinato  $xy$ .  
 (b) Indicato con  $T_{xy}$  il triangolo, proiezione ortogonale di  $T$  sul piano  $xy$ , si verifichi che

$$\mathcal{A}(T_{xy}) = \mathcal{A}(T) \cos \phi,$$

dove  $\mathcal{A}$  indica l'area.

- (c) Si provi inoltre che

$$\mathcal{A}(T)^2 = \mathcal{A}(T_{xy})^2 + \mathcal{A}(T_{yz})^2 + \mathcal{A}(T_{xz})^2.$$

- (d) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta  $r$  passante per  $A$  e  $B$ .  
 (e) Trovare i parametri direttori di  $r$  e quelli di giacitura di  $\alpha$ .  
 (f) Determinare il piano ortogonale ad  $\vec{AB}$  e passante per il punto medio  $H$  di  $AB$ .  
 (g) Trovare il baricentro  $G$  del triangolo  $T$ .

Si ricordi che si chiama *baricentro* dei punti  $A_1, \dots, A_n$  l'unico punto  $G$  tale che

$$(A_1 - G) + \dots + (A_n - G) = \vec{0}.$$

Questa nozione di baricentro è un caso particolare di quella che si incontra in statica (ponendo tutte le masse uguali).

9. Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per l'origine  $O$  ed è tangente nel punto  $P(1, 2)$  alla retta

$$r : x - y + 1 = 0.$$

10. Determinare le tangenti alla circonferenza

$$x^2 + y^2 - 7x + y = 0$$

parallele all'asse  $x$  e trovare i punti di tangenza.

11. Determinare la circonferenza tangente alle rette

$$r : 4x - 3y + 10 = 0 \quad r' : 4x - 3y - 30 = 0$$

ed avente centro sulla retta  $s : 2x + y = 0$ .

12. Determinare le circonferenze passanti per  $O$  e tangenti simultaneamente alle rette

$$r : 2\sqrt{3}x - 2y + 1 = 0 \quad s : x - \sqrt{3}y - 1 = 0.$$

## CAPITOLO 3

# SPAZI VETTORIALI

### 3.1 Sottospazi vettoriali, lineare indipendenza, basi

**Esercizio 3.1.** Dati in  $\mathbb{R}^4$  i vettori  $\vec{v}_1 = (1, 3, 1, 3)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 1, 1)$  e  $\vec{v}_3 = (1, -1, 1, -1)$  e i sottospazi  $V = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  e  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ ,

a) trovare  $V \cap W$  e  $V + W$ ;

b) trovare un supplementare di  $V \cap W$  in  $V$  e uno in  $W$ .

SOLUZIONE.

a)  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = -x - y - z\} = \{(a, b, c, -a - b - c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = L((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$ . È facile verificare che  $(1, 0, 0, -1)$ ,  $(0, 1, 0, -1)$ ,  $(0, 0, 1, -1)$  sono linearmente indipendenti, quindi formano una base di  $W$ .

La matrice delle componenti di  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2, e le ultime due colonne sono linearmente indipendenti. Pertanto,  $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  è una base di  $V$ .

Sia  $\vec{v} \in V \cap W$ . Poiché  $\vec{v} \in V$ , esistono  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $\vec{v} = a\vec{v}_2 + b\vec{v}_3 = (a+b, a-b, a+b, a-b)$ . Inoltre,  $\vec{v} \in W$ , quindi le sue coordinate soddisfano l'equazione  $x + y + z + t = 0$ , da cui,  $a = 0$ . Pertanto,  $V \cap W = \{\vec{v} = b\vec{v}_3 \mid b \in \mathbb{R}\} = L(\vec{v}_3)$

Dalla relazione di Grassmann, si ha

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

Essendo  $\mathbb{R}^4$  l'unico sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  stesso avente dimensione 4, possiamo concludere che  $V + W = \mathbb{R}^4$ .

b) Per trovare un supplementare di  $V \cap W$  in  $V$ , completiamo la base  $v_3$  di  $V \cap W$  con  $2 - 1 = 1$  vettore, ad esempio  $\vec{v}_2$ . Allora,  $X = L(\vec{v}_2)$  ci dà un supplementare di  $V \cap W$  in  $V$ .

Analogamente, un supplementare di  $V \cap W$  in  $W$  sarà un sottospazio di  $W$  generato da  $3 - 1 = 2$  vettori che, aggiunti a  $\vec{v}_3$ , diano una base di  $W$ , ad esempio,  $(1, 0, 0, -1)$  e  $(0, 1, 0, -1)$ . Quindi,  $Y = L((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1))$  è un supplementare di  $V \cap W$  in  $W$ .

**Esercizio 3.2.** In  $\mathbb{R}^4$  si consideri il sottospazio  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = x + 2z - t = 0\}$ .

a) Determinare una base  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  di  $U$ .

b) Dire se  $w = (1, 0, 1, 0) \in U$ .

c) Dire per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  il vettore  $\vec{x} = (a + 1, 0, 2, -a)$  è combinazione lineare di  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ .

SOLUZIONE.

a)  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = x + 2z - t = 0\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = -x, t = x + 2z\} = \{(\alpha, -\alpha, \beta, \alpha + 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = L(\vec{u}, \vec{v})$ , dove  $\vec{u} = (1, -1, 0, 1)$  e  $\vec{v} = (0, 0, 1, 2)$ . I vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono linearmente indipendenti, e quindi formano una base di  $U$ .

b)  $\vec{w} \in U$  se e solo se esistono  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tali che  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ , cioè

$$(1, 0, 1, 0) = (\alpha, -\alpha, \beta, \alpha + 2\beta),$$

che è impossibile, poiché dalle prime due coordinate segue  $\alpha = 1$  e  $-\alpha = 0$ . Pertanto,  $\vec{w} \notin U$ . Si osservi che  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sono quindi linearmente indipendenti.

c) Essendo  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  linearmente indipendenti,  $\vec{x}$  è combinazione lineare di  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  se e solo se la matrice  $A$  delle componenti di  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$  ha rango  $< 4$ , cioè ha determinante nullo. Tale matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a+1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

e il suo determinante è  $-a + 2$ . Pertanto,  $\vec{x}$  è combinazione lineare di  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  se e solo se  $a = 2$ .

**Esercizio 3.3.** In  $\mathbb{R}^4$  si considerino i sottospazi vettoriali

$$U = \{(0, -2a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z - t = 0\}.$$

a) Trovare una base di  $U$  e una di  $V$  e verificare che la somma di  $U$  e  $V$  è diretta.

b) Dire per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  il vettore  $\vec{w} = (1, -1, 0, k)$  è un elemento di  $E = U \oplus V$ .

SOLUZIONE.

a) I vettori di  $U$  sono del tipo  $a(0, -2, 1, 1)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , per cui,  $\{\vec{u} = (0, -2, 1, 1)\}$  è una base di  $U$ . Per quanto riguarda  $V$ ,

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = -x, z = t\} = \{(b, -b, c, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\} = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2),$$

dove  $\vec{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$  e  $\vec{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$ . Si verifica facilmente che  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  sono linearmente indipendenti, e quindi formano una base di  $V$ .

Sia  $\vec{v} \in U \cap V$ . Poiché  $\vec{v} \in U$ , esiste  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $\vec{v} = (0, -2a, a, a)$ . Ma  $\vec{v} \in V$ , quindi le sue coordinate verificano  $x + y = z - t = 0$ , per cui otteniamo  $0 - 2a = a - a = 0$ , ossia  $a = 0$ . Quindi,  $\vec{v} = (0, 0, 0, 0)$ , cioè,  $U \cap V = \{\vec{0}\}$ , vale a dire che la somma di  $U$  e  $V$  è diretta.

b) Poiché  $\{\vec{u}\}$  e  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  sono basi rispettivamente di  $U$  e  $V$  e la somma di  $U$  e  $V$  è diretta,  $\{\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  è una base di  $U \oplus V$ , e  $\vec{w} \in U \oplus V$  se e solo se è combinazione lineare dei vettori di tale base, cioè, se  $\{\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$  è linearmente dipendente. La matrice delle componenti di questi vettori rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & k \end{pmatrix},$$

e il suo determinante è  $2k$ . Quindi,  $\vec{w} \in U \oplus V$  se e solo se  $\text{rg } A < 4$ , cioè, se e solo se  $k = 0$ .

**Esercizio 3.4.** Dati in  $\mathbb{R}_2[x]$  i sottospazi  $U = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = p(4) = 0\}$  e  $V = L(p_1, p_2, p_3)$ , dove  $p_1(x) = x^2$ ,  $p_2(x) = x + 1$  e  $p_3(x) = 2x^2 - 3x - 3$ , trovare le dimensioni di  $U$  e  $V$  e una loro base.

SOLUZIONE. Sia  $p \in U$ . Poiché  $p(1) = p(4) = 0$ ,  $x - 1$  e  $x - 4$  dividono  $p$ . Inoltre,  $p \in \mathbb{R}_2[x]$ , quindi ha grado  $\leq 2$ . Pertanto, esiste  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $p(x) = a(x - 1)(x - 4)$ , e possiamo concludere che  $U = L((x - 1)(x - 4))$ ,  $\{(x - 1)(x - 4)\}$  è una base di  $U$ , e  $\dim U = 1$ .

Di  $V$  conosciamo già un sistema di generatori,  $\{p_1, p_2, p_3\}$ . Vediamo se sono linearmente indipendenti. Siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che  $ap_1 + bp_2 + cp_3 = o$ , dove  $o$  denota il polinomio nullo. Allora, per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$0 = ax^2 + b(x + 1) + c(2x^2 - 3x - 3) = (a + 2c)x^2 + (b - 3c)x + (b - 3c),$$

da cui segue  $a + 2c = b - 3c = 0$ , ossia  $a = -2c$  e  $b = 3c$ , per ogni valore reale di  $c$ . Quindi,  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  non sono linearmente indipendenti. Procedendo nello stesso modo, possiamo verificare che  $p_1$  e  $p_2$  sono linearmente indipendenti, per cui  $\{p_1, p_2\}$  è una base di  $V$ , e  $\dim V = 2$ .

**Esercizio 3.5.** Dati in  $\mathbb{R}_2[x]$  i sottospazi  $U = L(p_1, p_2)$  e  $V = L(q_1, q_2)$ , dove  $p_1(x) = x^2 + 2x$ ,  $p_2(x) = x + 1$ ,  $q_1(x) = x + 2$  e  $q_2(x) = -x^2 + 1$ , si trovino  $U \cap V$  e  $U + V$ .

**SOLUZIONE.** Sia  $p \in U \cap V$ . Allora, esistono  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tali che  $p = ap_1 + bp_2 = cq_1 + dq_2$ , ossia

$$p(x) = a(x^2 + 2x) + b(x + 1) = c(x + 2) + d(-x^2 + 1),$$

da cui segue, uguagliando i coefficienti delle potenze di  $x$ ,  $a = -d$ ,  $b = c - 2a$  e  $b = 2c + d$ , e quindi,  $a + d = c - d = b - 3d = 0$ . Di conseguenza,  $p \in U \cap V$  è necessariamente del tipo  $p(x) = d(x + 2) + d(-x^2 + 1) = d(-x^2 + x + 3)$ , per cui  $U \cap V = L(x^2 - x - 3)$  ed ha dimensione 1. Dall'identità di Grassmann segue che

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$$

e quindi,  $U + V = \mathbb{R}_2[x]$ .

**Esercizio 3.6.** Dato in  $\mathbb{R}_3[x]$  il sottospazio  $U = L(p)$ , con  $p(x) = x^2 - 5x + 6$ , trovare un sottospazio  $V$  supplementare di  $U$  in  $\mathbb{R}_3[x]$ . Esprimere poi  $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  come somma di un polinomio in  $U$  e di uno in  $V$ .

**SOLUZIONE.** Completiamo  $\{p\}$  con tre vettori, ad esempio della base canonica di  $\mathbb{R}_3[x]$ , in modo da ottenere una nuova base. Questi tre vettori generano un sottospazio supplementare di  $U$ . È facile verificare che  $\{p, 1, x, x^3\}$  è una base di  $\mathbb{R}_3[x]$ , e quindi  $V = L(1, x, x^3)$  è un sottospazio supplementare di  $U$ . Siano  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tali che  $q(x) = ap(x) + b + cx + dx^3$ , cioè,

$$x^3 + x^2 + x + 1 = a(x^2 - 5x + 6) + b + cx + dx^3 = dx^3 + ax^2 + (c - 5a)x + (6a + b).$$

Per il principio di identità dei polinomi, uguagliando i coefficienti delle potenze di  $x$  otteniamo  $a = d = 1$ ,  $b = -5$ ,  $c = 6$ . Pertanto,  $p = q_1 + q_2$ , dove  $q_1 = 1 \cdot p = p \in U$  e  $q_2(x) = -5 + 6x + x^3 \in V$ .

**Esercizio 3.7.** Dati in  $\mathbb{R}_3[x]$  i sottospazi  $U = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_1 - a_3 = a_2 = a_0 = 0\}$  e  $V = L(q_1, q_2)$ , dove  $q_1(x) = x^2 + x$  e  $q_2(x) = x^3 + 1$ , si trovino  $U \cap V$  ed  $U + V$ .

**SOLUZIONE.** Sia  $p \in U \cap V$ . Poiché  $p \in V$ , esistono  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $p = aq_1 + bq_2$ , ossia

$$p(x) = a(x^2 + x) + b(x^3 + 1) = bx^3 + ax^2 + ax + b.$$

D'altro canto,  $p \in U$ , per cui i suoi coefficienti  $a_i$  soddisfano  $a_1 - a_3 = a_2 = a_0 = 0$ , cioè,  $a = b = 0$ , e quindi,  $U \cap V = O$  e la somma di  $U$  e  $V$  è diretta.

Se  $p \in U$ , allora  $p(x) = a_1(x^3 + x)$ . Quindi,  $U = L(p_1)$ , dove  $p_1(x) = x^3 + x$ , ed ha dimensione 1. Inoltre, si verifica facilmente che  $\{q_1, q_2\}$  è una base di  $V$ , e quindi,  $\dim V = 2$ . Dalla relazione di Grassmann,

$$\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V = 1 + 2 = 3.$$

Essendo la somma di  $U$  e  $V$  diretta,  $U \oplus V$  è generato dall'unione di una base di  $U$  con una base di  $V$ , cioè,

$$\begin{aligned} U \oplus V &= L(p_1, q_1, q_2) = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R} : p = ap_1 + bq_1 + cq_2\} = \\ &= \{p(x) = (a+c)x^3 + bx^2 + (a+b)x + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 + a_1 - a_2 - a_3 = 0\}. \end{aligned}$$

**Esercizio 3.8.** In  $\mathbb{R}^4$  si consideri l'insieme  $X = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ , dove  $\vec{v}_1 = (k, 2k, 0, k)$ ,  $\vec{v}_2 = (2k+1, k+2, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, k+2, -k, 1)$  e  $\vec{v}_4 = (k-4, 0, 0, k)$ , dove  $k \in \mathbb{R}$ .

a) Trovare, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il rango di  $X$ ,  $\text{rg } X$ .

b) Trovare, per ogni  $k$  tale che  $X$  sia una base di  $\mathbb{R}^4$ , le componenti di  $\vec{v} = (-1, 0, 0, 0)$  rispetto a tale base.

c) Per ogni  $k$  tale che  $\text{rg } X = 3$ , si verifichi se  $\vec{v} \in L(X)$ .

d) Per ogni  $k$  tale che  $\text{rg } X = 2$ , si trovi un sottospazio supplementare di  $L(X)$  in  $\mathbb{R}^4$ .

SOLUZIONE.

a) Le componenti dei vettori  $\vec{v}_i$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$  formano la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 2k+1 & 1 & k-4 \\ 2k & k+2 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 \\ k & 1 & 1 & k \end{pmatrix},$$

e  $\text{rg } X = \text{rg } A$ . Essendo  $\det A = 4k^3(k-1)$ , se  $k \neq 0, 1$  allora  $\det A \neq 0$  e quindi,  $\text{rg } X = \text{rg } A = 4$ . In tal caso,  $X$  è una base di  $\mathbb{R}^4$ .

Se  $k = 1$ , allora il complemento algebrico di  $a_{41}$  ha determinante  $9 \neq 0$ . Quindi,  $\text{rg } X = \text{rg } A = 3$ , e ad esempio  $\vec{v}_2, \vec{v}_3$  e  $\vec{v}_4$  sono linearmente indipendenti.

Se  $k = 0$ , allora  $\text{rg } X = \text{rg } A = 2$ , le ultime due colonne (e quindi, i vettori  $\vec{v}_3, \vec{v}_4$ ) sono linearmente indipendenti.

b) Assumendo  $k \neq 0, 1$ , siano  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tali che  $\vec{v} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 + d\vec{v}_4$ , cioè,

$$(-1, 0, 0, 0) = a(k, 2k, 0, k) + b(2k+1, k+2, 0, 1) + c(1, k+2, -k, 1) + d(k-4, 0, 0, k),$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} ka + (2k+1)b + c + (k-4)d = -1, \\ 2ka + (k+2)b + (k+2)c = 0, \\ -kc = 0, \\ ka + b + c + kd = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare usando  $k$  come parametro e tenendo conto del fatto che  $k \neq 0, 1$ , otteniamo

$$\begin{cases} a = \frac{k+2}{4k(k-1)}, \\ b = \frac{-1}{2(k-1)}, \\ c = 0, \\ d = \frac{-1}{4(k-1)}. \end{cases}$$

c) Quando  $\text{rg } X = 3$ , cioè per  $k = 1$ , si ha che  $\vec{v} \in L(X) = L(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$  se e solo se esistono  $b, c, d \in \mathbb{R}$  tali che  $\vec{v} = b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 + d\vec{v}_4$ , cioè,

$$(-1, 0, 0, 0) = b(3, 3, 0, 1) + c(1, 3, -1, 1) + d(-3, 0, 0, 1),$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} 3b + c - 3d = -1, \\ 3b + 3c = 0, \\ -c = 0, \\ b + c + d = 0, \end{cases}$$

che è incompatibile. Quindi,  $\vec{v} \notin L(X)$  per  $k = 1$ .

d) L'unico valore di  $k$  per cui  $\text{rg } X = 2$  è  $k = 0$ . In tal caso, completiamo la base  $\{\vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  di  $L(X)$  con due vettori della base canonica, e il sottospazio da essi generato sarà un supplementare di  $L(X)$ . Si verifica facilmente che  $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  sono linearmente indipendenti, dove  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$  e  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$ , e quindi,  $Y = L(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$  è un sottospazio supplementare di  $X$  in  $\mathbb{R}^4$ .

**Esercizio 3.9.** Sia  $\mathbb{R}$  spazio vettoriale su  $\mathbb{Q}$ , rispetto alla somma di numeri reali e al prodotto di un numero razionale per un numero reale. Provare che i vettori  $u = 1$  e  $v = 2$  sono linearmente dipendenti, mentre  $u$  e  $w = \sqrt{2}$  sono linearmente indipendenti.

SOLUZIONE. Siano  $a, b \in \mathbb{Q}$  tali che  $a \cdot 1 + b \cdot 2 = 0$ . Allora,  $a = -2b$ , per cui possiamo prendere ad esempio  $a = -2$ ,  $b = 1$  ed otteniamo una combinazione lineare non banale di  $u = 1$  e  $v = 2$  che dà il vettore nullo  $0$ . Quindi,  $1$  e  $2$  sono linearmente dipendenti.

Invece, siano ora  $a, b \in \mathbb{Q}$  tali che  $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} = 0$ . Allora,  $a = -\sqrt{2}b$ , che ha come unica soluzione razionale  $a = b = 0$ . Pertanto,  $1$  e  $\sqrt{2}$  sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 3.10.** Provare che  $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e  $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  formano una base di  $U = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \text{tr}A = 0\}$ , e trovare le componenti di  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$  rispetto a tale base.

SOLUZIONE.

$$\begin{aligned} U &= \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \text{tr}A = 0\} = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{11} + a_{22} = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{21}A_3, \end{aligned}$$

dove  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . È facile verificare che  $A_1$ ,  $A_2$  ed  $A_3$  sono linearmente indipendenti, e quindi formano una base di  $U$ . In particolare,  $\dim U = 3$ , quindi per provare che  $\{B_1, B_2, B_3\}$  è una base di  $U$  basta provare ad esempio che sono linearmente indipendenti. Siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che  $aB_1 + bB_2 + cB_3 = O$ , dove  $O$  denota la matrice nulla. Allora,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e quindi,

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0, \\ -3a - b + c = 0, \\ a + c = 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene facilmente  $a = b = c = 0$ , cioè, i tre vettori sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di  $U$ . Siano ora  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che  $A = aB_1 + bB_2 + cB_3$ . Allora,

$$\begin{cases} 2a + b + c = 3, \\ -3a - b + c = 5, \\ a + c = -2, \end{cases}$$

da cui otteniamo  $a = -4$ ,  $b = 9$ ,  $c = 2$ .

**Esercizio 3.11.** Fissata  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ ,

a) Provare che  $V = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AX = XA\}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

b) Trovare una base di  $V$  ed un supplementare  $W$  di  $V$  in  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

c) Esprimere  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  come somma di due matrici di  $V$  e  $W$ .

SOLUZIONE.

a) Siano  $X, Y \in V$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Allora

$$A(aX + bY) = A(aX) + A(bY) = aAX + bAY = aXA + bYA = (aX + bY)A.$$

Quindi,  $aX + bY \in V$ , cioè,  $V$  è un sottospazio vettoriale.

b) Sia  $X \in V$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ . Imponendo che  $AX = XA$ , si ottiene che i coefficienti di  $X$  devono soddisfare il sistema e quindi,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2x_1, \\ x_2 = 2x_2, \\ 2x_3 + x_4 = x_1 + x_3, \\ x_4 = x_2 + x_4, \end{cases}$$

da cui si ottiene  $x_2 = x_1 - x_3 - x_4 = 0$ . Quindi,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 + x_4 & 0 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = L \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

È facile verificare che le due matrici  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , oltre ad essere un sistema di generatori per  $V$ , sono linearmente indipendenti, e quindi formano una base di  $V$ . Completiamo  $\{X_1, X_2\}$  con due matrici, ad esempio della base canonica di  $\mathbb{R}^{2,2}$ , in modo da ottenere una nuova base di  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Ad esempio,  $\{X_1, X_2, E_1, E_2\}$  è una base di  $\mathbb{R}^{2,2}$ , dove  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Pertanto,  $W = L(E_1, E_2)$  è un sottospazio supplementare di  $V$  in  $\mathbb{R}^{2,2}$ .

c)  $B \in \mathbb{R}^{2,2} = V \oplus W$ . Cerchiamo  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tali che  $B = aX_1 + bX_2 + cE_1 + dE_2$ . Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Uguagliando i coefficienti di posto corrispondente otteniamo  $a = b = d = 1$ ,  $c = -1$ . Pertanto,  $B_1 = X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in V$ ,  $B_2 = -E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ , e  $B = B_1 + B_2$ .

**Esercizio 3.12.** *Provare che i sottoinsiemi  $\mathcal{S}$  ed  $\mathcal{A}$ , formati rispettivamente dalle matrici simmetriche e quelle antisimmetriche di ordine  $n$ , formano sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^{n,n}$ . Per  $n = 2$ , trovare una base per  $\mathcal{S}$  e una base per  $\mathcal{A}$ .*

SOLUZIONE.  $\mathcal{S} = \{X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n} \mid x_{ij} = x_{ji} \forall i, j\}$ .

Quindi, se  $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}) \in \mathcal{S}$ , allora  $X + Y = (x_{ij} + y_{ij}) \in \mathcal{S}$ , poiché  $x_{ji} + y_{ji} = x_{ij} + y_{ij}$  per ogni  $i, j$ . Inoltre, per ogni  $k \in \mathbb{R}$ ,  $kX \in \mathcal{S}$ , poiché  $kx_{ji} = kx_{ij}$  per ogni  $i, j$ . Avendo provato che  $\mathcal{S}$  è chiuso rispetto alla somma di matrici ed al prodotto di una matrice per uno scalare, possiamo concludere che  $\mathcal{S}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{n,n}$ . Per  $\mathcal{A}$  si procede analogamente, la dimostrazione è lasciata per esercizio.

Sia ora  $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{2,2}$ . Poiché  $x_{12} = x_{21}$ , possiamo scrivere

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} = x_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cioè,  $\mathcal{S}$  è generato da  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ed  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Inoltre,  $A_1, A_2$  ed  $A_3$  sono linearmente indipendenti. Infatti, siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che  $aA_1 + bA_2 + cA_3 = O$ , dove  $O$  denota la matrice nulla. Allora

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

da cui segue immediatamente  $a = b = c = 0$ . Quindi, poiché  $A_1, A_2$  e  $A_3$  sono linearmente indipendenti e generano  $\mathcal{S}$ , possiamo concludere che essi formano una base di  $\mathcal{S}$ . In particolare,  $\dim \mathcal{S} = 3$ .

Se  $X = (x_{ij}) \in \mathcal{A}$ , da  $x_{ij} = -x_{ji}$  segue che  $a_{11} = a_{22} = 0$  e  $a_{21} = -a_{12}$ . Pertanto,  $X = a_{12}A_4 = a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , cioè,  $\mathcal{A}$  è generato da  $A_4$ . Essendo  $A_4 \neq O$ , concludiamo che  $\{A_4\}$  è una base di  $\mathcal{A}$ . In particolare,  $\dim \mathcal{A} = 1$ .

**Esercizio 3.13.** *Provare che i sottospazi  $\mathcal{S}$  ed  $\mathcal{A}$ , formati rispettivamente dalle matrici simmetriche e quelle antisimmetriche di ordine  $n$ , sono supplementari in  $\mathbb{R}^{n,n}$ .*

SOLUZIONE. Ricordiamo che  $\mathcal{S} = \{X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n} \mid x_{ij} = x_{ji} \forall i, j\}$  e  $\mathcal{A} = \{X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n} \mid x_{ij} = -x_{ji} \forall i, j\}$  (vedi anche Es. 3.12).

Quindi, se  $X = (x_{ij}) \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ , allora  $x_{ij} = x_{ji} = -x_{ji}$ , cioè,  $x_{ij} = 0$ , per ogni  $i, j$ . Così,  $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = O$ , dove  $O$  denota il sottospazio nullo, e resta da provare che  $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathbb{R}^{n,n}$ . Per ogni  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , risulta:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t),$$

dove  $A^t$  denota la matrice trasposta di  $A$ . E' facile verificare che  $\frac{1}{2}(A + A^t) \in \mathcal{S}$  e che  $\frac{1}{2}(A - A^t) \in \mathcal{A}$ , e quindi,  $A \in \mathcal{S} + \mathcal{A}$ .

**Esercizio 3.14.** *Per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sia  $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Provare che, fissato  $\lambda$ , l'insieme  $V = \{X \in \mathbb{R}^{3,3} \mid XA(\lambda) = A(\lambda)X = 0\}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{3,3}$ , e calcolarne la dimensione in funzione di  $\lambda$ .*

SOLUZIONE. Siano  $X, Y \in V$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Allora:

$$A(\lambda)(aX + bY) = A(\lambda)(aX) + A(\lambda)(bY) = aA(\lambda)X + bA(\lambda)(Y) = 0,$$

e analogamente,  $(aX + bY)A(\lambda) = 0$ , tenendo conto del fatto che  $X, Y \in V$ . Quindi,  $V$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{3,3}$ .

Sia  $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \in V$ . Imponendo  $XA(\lambda) = 0$ , otteniamo

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{12} = 0, \\ x_{21} + 2x_{22} = 0, \\ x_{31} + 2x_{32} = 0, \\ \lambda x_{13} = \lambda x_{23} = \lambda x_{33} = 0. \end{cases}$$

Analogamente, imponendo  $A(\lambda)X = 0$ , si ha

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 0, \\ x_{12} + 2x_{22} = 0, \\ x_{13} + 2x_{23} = 0, \\ \lambda x_{31} = \lambda x_{32} = \lambda x_{33} = 0. \end{cases}$$

Tutte queste condizioni danno un sistema lineare di cui ora determiniamo le soluzioni.

Se  $\lambda \neq 0$ , otteniamo  $x_{13} = x_{23} = x_{33} = x_{31} = x_{32} = 0$ , e  $x_{21} = x_{12} = -2x_{22}$ ,  $x_{11} = 4x_{22}$ ,  $x_{21} = -2x_{22}$ . Posto  $x_{22} = \alpha$ , risulta che il generico vettore di  $V$  è una matrice del tipo  $X = \begin{pmatrix} 4\alpha & -2\alpha & 0 \\ -2\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Quindi, se  $\lambda \neq 0$ , allora  $U = L(X_1)$ , dove

$$X_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resta da esaminare il caso  $\lambda = 0$ . In tal caso, il sistema lineare dà solo  $x_{21} = x_{12} = -2x_{22}$ ,  $x_{11} = 4x_{22}$ ,  $x_{13} = -2x_{23}$ ,  $x_{31} = -2x_{32}$ . Allora, posto  $x_{22} = \alpha$ ,  $x_{23} = \beta$ ,  $x_{32} = \gamma$  e  $x_{33} = \delta$ , risulta che il generico vettore di  $V$  è una matrice del tipo

$$X = \begin{pmatrix} 4\alpha & -2\alpha & -2\beta \\ -2\alpha & \alpha & \beta \\ -2\gamma & \gamma & \delta \end{pmatrix}. \text{ Pertanto, se } \lambda = 0, \text{ allora } U = L(X_1, X_2, X_3, X_4), \text{ dove}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si prova facilmente che, oltre ad essere un sistema di generatori,  $X_1, X_2, X_3, X_4$  sono anche linearmente indipendenti, e quindi formano una base di  $V$ . Riassumendo,  $\dim V = 1$  se e solo se  $\lambda \neq 0$ , mentre  $\dim V = 4$  se e solo se  $\lambda = 0$ .

## 3.2 Applicazioni lineari

**Esercizio 3.15.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'applicazione lineare la cui matrice associata, rispetto alle basi canoniche  $B$  e  $B'$  di  $\mathbb{R}^3$  ed  $\mathbb{R}^2$  rispettivamente, è  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Trovare  $f(1, 2, 3)$ .

b) Trovare  $\text{Ker } f$ , dire se  $f$  è iniettiva e suriettiva.

c) Trovare  $f^{-1}(1, 2)$ .

SOLUZIONE.

a) Considerando le matrici colonna  $X$  delle componenti di  $x = (1, 2, 3)$  rispetto a  $B$  e di  $f(1, 2, 3)$  rispetto a  $B'$ , si ha

$$f(1, 2, 3) = A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = (7, 4).$$

b)  $\vec{v} = (x, y, z) \in \text{Ker } f$  se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ha  $x + 2z = y + 3z = 0$ . Quindi,

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = y + 3z = 0\} = \{(2a, 3a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\} = L((2, 3, -1)).$$

Poiché  $\text{Ker } f$  non è il sottospazio nullo,  $f$  non è iniettiva. Dal Teorema del rango segue che

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2.$$

Di conseguenza,  $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ , cioè,  $f$  è suriettiva.

c) Le terne  $(x, y, z) \in f^{-1}(1, 2)$  corrispondono alle soluzioni del sistema lineare

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

che dà  $x + 2z = 1$ ,  $-x + y + z = 2$ . Pertanto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(1, 2) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 1, -x + y + z = 2\} = \\ &= \{(-2a + 1, -3a + 3, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = (1, 3, 0) + \text{Ker } f. \end{aligned}$$

Si noti che  $f(1, 1, 0) = (1, 2)$ , e si confronti il risultato trovato con quanto afferma il Teorema di Rouché–Capelli circa le soluzioni di un sistema lineare e del sistema omogeneo associato.

**Esercizio 3.16.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(x, y) \mapsto (2x, -2y, x + y)$ . Siano  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^2$ ,  $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , e  $B'' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  la base di  $\mathbb{R}^3$  formata dai vettori  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$  e  $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)$ . Trovare  $M_B^{B'}(f)$  e  $M_B^{B''}(f)$ .

SOLUZIONE.

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= f(1, 0) = (2, 0, 1) = 2\vec{e}'_1 + \vec{e}'_3, \\ f(\vec{e}_2) &= f(0, 1) = (0, -2, 1) = -2\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3, \end{aligned}$$

e quindi,

$$M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per determinare  $M_B^{B''}(f)$ , dobbiamo esprimere  $f(\vec{e}_1)$ ,  $f(\vec{e}_2)$  come combinazioni lineari dei vettori della base  $B''$ . Siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che  $f(\vec{e}_1) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$ . Allora,

$$f(\vec{e}_1) = (2, 0, 1) = a(1, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 0, 0) = (a + b + c, a, a + b),$$

da cui otteniamo  $a = 0$ ,  $b = 1$  e  $c = 1$ , che sono i coefficienti della prima colonna di  $M_B^{B''}(f)$ . Analogamente, siano  $a', b', c' \in \mathbb{R}$  tali che  $f(\vec{e}_2) = a'\vec{v}_1 + b'\vec{v}_2 + c'\vec{v}_3$ . Si ottiene  $a' = -2$ ,  $b' = 3$  e  $c' = -1$ , che formano la seconda colonna di  $M_B^{B''}(f)$ . Pertanto,

$$M_B^{B''}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.17.** Data  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$ , trovare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $A$  sia la matrice associata ad  $f$  rispetto alle basi canoniche  $B, B'$  di  $\mathbb{R}^3$  ed  $\mathbb{R}^2$  rispettivamente.

**SOLUZIONE.** Poiché  $A$  è la matrice associata ad  $f$  rispetto alle basi canoniche  $B, B'$  di  $\mathbb{R}^3$  ed  $\mathbb{R}^2$ , per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  si ha che la matrice colonna  $Y$  delle componenti di  $f(x, y, z)$  rispetto a  $B'$  è data da  $Y = a \cdot X$ , dove  $X$  è la matrice colonna delle componenti di  $(x, y, z)$  rispetto a  $B$ . Quindi,

$$Y = A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z \end{pmatrix},$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x + y, \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z). \end{aligned}$$

**Esercizio 3.18.** Si considerino lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  con la struttura euclidea standard e l'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^3$  così definito

$$f(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z, y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z \right).$$

1. Provare che  $f$  è un isomorfismo e trovare  $f^{-1}$ .

2. Trovare  $f(W)$  dove  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ .

SOLUZIONE.

1. La matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica  $\mathcal{C}$  è

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Poiché  $\det A = 1 \neq 0$ ,  $A$  è invertibile e quindi  $f$  è un isomorfismo. Inoltre

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

quindi

$$f^{-1}(x', y', z') = \left( \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}z', y', \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}z' \right).$$

2.  $W = \{(x, x+z, z)\}$  è un piano e  $W = \mathcal{L}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ , dove  $\vec{w}_1 = (1, 1, 0)$  e  $\vec{w}_2 = (0, 1, 1)$ . Allora, per un teorema noto,  $f(W) = \mathcal{L}(f(\vec{w}_1), f(\vec{w}_2))$ , e risulta anche  $f(\vec{w}_1) = (1/2, 1, -\sqrt{3}/2)$ ,  $f(\vec{w}_2) = (\sqrt{3}/2, 1, 1/2)$ , quindi  $f(W)$  è il piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu, \\ y = \lambda + \mu, \\ z = -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu. \end{cases}$$

**Esercizio 3.19.** Siano  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$  e  $V$  l'asse delle  $x$ . Consideriamo  $f : \mathbb{R}^2 = U \oplus V \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \mapsto \vec{u} - \vec{v}$  ( $f$  è la simmetria rispetto all'asse delle  $x$ , eseguita parallelamente alla retta  $U$ ).

a) Provare che  $f$  è lineare. Esplicitare  $f$ .

b) Trovare  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$ , e la matrice  $M_B(f)$ , dove  $B$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^2$ .

SOLUZIONE.

a) Dati  $\vec{w}, \vec{w}' \in \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{w}' = \vec{u}' + \vec{v}'$ , e  $a, b \in \mathbb{R}$ , risulta:

$$\begin{aligned} f(a\vec{w} + b\vec{w}') &= f(a(\vec{u} + \vec{v}) + b(\vec{u}' + \vec{v}')) = f((a\vec{u} + b\vec{u}') + (a\vec{v} + b\vec{v}')) = \\ &= a\vec{u} + b\vec{u}' - (a\vec{v} + b\vec{v}') = (a\vec{u} - a\vec{v}) + (b\vec{u}' - b\vec{v}') \\ &= a(\vec{u} - \vec{v}) + b(\vec{u}' - \vec{v}') = af(\vec{w}) + bf(\vec{w}'). \end{aligned}$$

Pertanto,  $f$  è un'applicazione lineare.

Consideriamo la base canonica  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  di  $\mathbb{R}^2$ ;  $\vec{e}_1 = (1, 0) \in V$ , per cui  $f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$ . Inoltre,  $\vec{e}_2 = (0, 1) = (\vec{e}_2 + \vec{e}_1) + (-\vec{e}_1) \in U \oplus V$ , quindi  $f(\vec{e}_2) = (\vec{e}_2 + \vec{e}_1) + \vec{e}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ . Pertanto, la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $B$  è

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora, per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , si ha

$$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ y \end{pmatrix} = (-x + 2y, y).$$

b)  $(x, y) \in \text{Ker } f$  se e solo se  $f(x, y) = (0, 0)$ , cioè se e solo se  $(-x + 2y, y) = (0, 0)$ , da cui segue subito  $x = y = 0$ . Quindi,  $\text{Ker } f = O$ , il sottospazio nullo di  $\mathbb{R}^2$ , ossia,  $f$  è iniettiva.

Per quanto riguarda  $\text{Im } f$ , si ha

$$\text{Im } f = L(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)) = L(-\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \mathbb{R}^2.$$

Alla stessa conclusione si arriva applicando il *Teorema del rango*. Infatti:

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^2 - 0 = \dim \mathbb{R}^2.$$

Quindi, essendo  $\text{Im } f$  un sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  avente la sua stessa dimensione, si conclude che  $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 3.20.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la proiezione ortogonale sul piano  $\pi : x + y = 0$ . Trovare  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$  e una loro base, e provare che  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

SOLUZIONE.  $\pi$  individua il sottospazio vettoriale

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\} = \{(a, -a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2),$$

dove  $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 0, 1)$ . Si verifica facilmente che  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  è una base di  $U$ , quindi  $\dim U = 2$ . Per ogni vettore  $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , si ha

$$\vec{v} \in U^\perp \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u}_1 = \vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow x - y = z = 0.$$

Quindi,  $U^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z = 0\} = \{(c, c, 0) \mid c \in \mathbb{R}\} = L(\vec{u}_3)$ , dove  $\vec{u}_3 = (1, 1, 0)$ . Chiaramente,  $\{\vec{u}_3\}$  è base di  $U^\perp$  e  $\dim U^\perp = 1$ . Essendo  $f$  la proiezione ortogonale su  $U$ , risulta:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} = \vec{u} + \vec{u}^\perp &\longmapsto \vec{u}, \end{aligned}$$

dove  $\vec{u}$  (rispettivamente,  $\vec{u}^\perp$ ) indica la componente di  $\vec{v}$  in  $U$  (risp., in  $U^\perp$ ).

$\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}^\perp \in \text{Ker } f$  se e solo se  $\vec{u} = 0$ , cioè se e solo se  $\vec{v} = \vec{u}^\perp \in U^\perp$ . Quindi,  $\text{Ker } f = U^\perp$ .

Per quanto riguarda  $\text{Im } f$ , si noti che, dato  $\vec{u} \in U \subset \mathbb{R}^3$ , si ha  $f(\vec{u}) = \vec{u}$ . Quindi,  $U \subset \text{Im } f$ . D'altro canto, per il Teorema del rango,

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2 = \dim U.$$

Quindi, essendo  $U$  un sottospazio di  $\text{Im } f$  avente la sua stessa dimensione, si conclude che  $\text{Im } f = U$ . In particolare, è ovvio ora che  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ , poiché  $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ , e  $\text{Ker } f = U^\perp$ ,  $\text{Im } f = U$ .

**Esercizio 3.21.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare tale che  $f(1, 1) = (3, -1, 0)$ ,  $f(-1, 1) = (1, 0, -1)$ .

a) Trovare la matrice  $A$ , associata ad  $f$  rispetto alle basi canoniche  $B$  e  $B'$  di  $\mathbb{R}^2$  e di  $\mathbb{R}^3$  rispettivamente.

b) Trovare  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$ .

c) Trovare  $f^{-1}(2, h, -1)$ , dove  $h \in \mathbb{R}$ .

SOLUZIONE.

a)  $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ ,  $B' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ . Risulta:

$$\begin{aligned} (3, -1, 0) &= f(1, 1) = f(\vec{i} + \vec{j}) = f(\vec{i}) + f(\vec{j}), \\ (1, 0, -1) &= f(-1, 1) = f(-\vec{i} + \vec{j}) = -f(\vec{i}) + f(\vec{j}). \end{aligned}$$

Dalle due precedenti uguaglianze si ricava

$$\begin{aligned} f(\vec{i}) &= \vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3, \\ f(\vec{j}) &= 2\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Visto che le componenti di  $f(\vec{i})$  ed  $f(\vec{j})$  formano la prima e la seconda colonna della matrice  $A$  associata a  $f$ , concludiamo che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b)  $\vec{v} = (x, y) \in \text{Ker } f$  se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ha  $x + 2y = x + y = x - y = 0$ , e quindi,  $x = y = 0$ . Pertanto,  $\text{Ker } f$  è il sottospazio nullo, cioè,  $f$  è iniettiva. Dal Teorema del rango segue che

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \text{Ker } f = 2 - 0 = 2.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= L(f(\vec{i}), f(\vec{j})) = L\left(\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right) = \\ &= L\left(\left(2, -1, 1\right), \left(4, -1, -1\right)\right) = \{(2a + 4b, -a - b, a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

c) Le coppie  $(x, y) \in f^{-1}(2, h, -1)$  corrispondono alle soluzioni del sistema lineare

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ h \\ -1 \end{pmatrix},$$

che è incompatibile per  $h \neq -1/3$ , mentre per  $h = -1/3$  ha soluzione  $x = 4/3$ ,  $y = -2/3$ . Pertanto, se  $h \neq -1/3$  allora  $f^{-1}(2, h, -1) = \emptyset$ , mentre se  $h = -1/3$  allora  $f^{-1}(2, h, -1) = \{(4/3, -2/3)\}$ .

**Esercizio 3.22.** Si considerino gli endomorfismi  $f_k$  di  $\mathbb{R}^3$  così definiti, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ :

$$f_k(x, y, z) = (y + z, kx + y, -y).$$

1. Dire per quali valori di  $k$  l'applicazione  $f_k$  è un isomorfismo.
2. Calcolare  $f_0(W)$ , dove  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - 2y = 3\}$ , specificando se esso sia un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .

SOLUZIONE.

1. La matrice di  $f_k$  rispetto alla base canonica è

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = -k.$$

Quindi  $f_k$  è un isomorfismo per  $k \neq 0$ .

2.  $W = \{(u, v, 2v + 3) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$ , quindi

$$f_0(W) = \{(3v + 3, v, -v) \mid v \in \mathbb{R}\},$$

che non è un sottospazio vettoriale poiché non contiene il vettore nullo.

**Esercizio 3.23.** Consideriamo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ ,  $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 2z & x - y \\ y + z & x \end{pmatrix}$ .

a) Provare che  $f$  è lineare.

b) Trovare  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$  e una sua base.

c) Trovare  $f^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ , al variare di  $a \in \mathbb{R}$ .

SOLUZIONE. a) è lasciata per esercizio (segue facilmente dalla dipendenza lineare dei coefficienti di  $f(x, y, z)$  da  $x, y$  e  $z$ ).

b)  $\vec{v} = (x, y, z) \in \text{Ker } f$  se e solo se

$$\begin{pmatrix} 2z & x - y \\ y + z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uguagliando i coefficienti delle due matrici, otteniamo  $x = y = z = 0$ . Pertanto,  $\text{Ker } f$  è il sottospazio nullo, cioè,  $f$  è iniettiva. Dal Teorema del rango segue che

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 3 - 0 = 3.$$

Considerata la base canonica  $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  di  $\mathbb{R}^3$ , risulta:

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= L(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})) = L\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 2\gamma & \alpha - \beta \\ \beta + \gamma & \alpha \end{pmatrix} / \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Poichè  $\dim \text{Im } f = 3$ , le tre matrici che generano  $\text{Im } f$  formano una base di  $\text{Im } f$ .

c) Le terne  $(x, y, z) \in f^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$  corrispondono alle soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 2z & x - y \\ y + z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

cioè, del sistema lineare

$$\begin{cases} 2z = a, \\ x - y = 0 \\ y + z = 1 \\ x = a. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene che è incompatibile per  $a \neq 2/3$ , mentre per  $a = 2/3$  ha soluzione  $x = 2/3$ ,  $y = 2/3$ ,  $z = 1/3$ . Pertanto, se  $a \neq 2/3$  allora  $f^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \emptyset$ ,

mentre se  $a = 2/3$  allora  $f^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \{(2/3, 2/3, 1/3)\}$ .

**Esercizio 3.24.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica  $B$  di  $\mathbb{R}^3$  è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare  $\text{rg } f^2$  (il rango di  $f^2$ ) e  $\text{ker } f^2$ .

b) Trovare  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$ .

c) Trovare  $f^{-1}(V)$ , dove  $V = L((1, 0, 0), (1, 0, 1))$ .

SOLUZIONE. a) Essendo  $A$  la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $B$ , la matrice associata a  $f^2$  rispetto a  $B$  è

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Risulta  $\text{rg } f^2 = \text{rg } A^2 = 1$ . Inoltre, poichè  $\dim(\text{Im } f^2) = \text{rg } f^2 = 1$ , dal Teorema del rango segue che  $\dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2$ .

$$(x, y, z) \in \text{Ker } f^2 \text{ se e solo se } A^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ cioè, se e solo se } 2(x - y - z) = 0.$$

Pertanto,

$$\text{Ker } f^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} = \{(\alpha + \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = L((1, 1, 0), (1, 0, 1)).$$

$$\text{b) } (x, y, z) \in \text{Ker } f \text{ se e solo se } A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ cioè, se e solo se}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - z = 0 \\ 2y = 0, \end{cases}$$

da cui segue  $x - z = y = 0$ . Pertanto,

$$\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = y = 0\} = \{(a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = L((1, 0, 1)).$$

Si noti che, come è ovvio,  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ .

Considerata la base canonica  $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  di  $\mathbb{R}^3$ , risulta:

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= L(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})) = L((1, 1, 0), (1, -1, 2), (-1, -1, 0)) = \\ &= L((1, 1, 0), (1, -1, 2)) = \{(a + b, a - b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Si noti che  $(1, 0, 1) \in \text{Im } f$ , e  $\text{Ker } f = L((1, 0, 1))$ . Quindi,  $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$ , per cui,  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \text{Ker } f = L((1, 0, 1))$ .

c)  $V = L((1, 0, 0), (1, 0, 1)) = \{(a + b, 0, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ . Dato  $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , risulta:

$$\vec{v} \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(\vec{v}) \in V \Leftrightarrow (x + y - z, x - y - z, 2y) \in V.$$

I vettori di  $V$  sono quelli con seconda componente nulla, quindi,  $\vec{v} \in f^{-1}(V)$  se e solo se  $x - y - z = 0$ . Pertanto:

$$f^{-1}(V) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}.$$

**Esercizio 3.25.** Fissato  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ , sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v} \mapsto 3\vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{u}$ .

a) Provare che  $f$  è lineare.

b) Trovare la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica  $B$  di  $\mathbb{R}^3$ ,  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$ .

SOLUZIONE. a) Per ogni  $\vec{v}, \vec{v}' \in \mathbb{R}^3$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f(a\vec{v} + b\vec{v}') &= 3(a\vec{v} + b\vec{v}') + (a\vec{v} + b\vec{v}') \wedge \vec{u} = 3a\vec{v} + 3b\vec{v}' + a\vec{v} \wedge \vec{u} + b\vec{v}' \wedge \vec{u} = \\ &= a(3\vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{u}) + b(3\vec{v}' + \vec{v}' \wedge \vec{u}) = af(\vec{v}) + bf(\vec{v}'). \end{aligned}$$

Quindi,  $f$  è lineare.

b) Dalla definizione di  $f$ , segue

$$\begin{aligned} f(\vec{i}) &= 3\vec{i} + \vec{i} \wedge \vec{u} = 3\vec{i} + \vec{i} \wedge (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 3\vec{i} - 2\vec{k} - 3\vec{j}, \\ f(\vec{j}) &= 3\vec{j} + \vec{j} \wedge (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 3\vec{j} - \vec{k} + 3\vec{i}, \\ f(\vec{k}) &= 3\vec{k} + \vec{k} \wedge (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 3\vec{k} + \vec{j} + 2\vec{i}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poiché  $\det A = 69 \neq 0$ ,  $A$  è invertibile. Quindi, anche  $f$  è invertibile, cioè è iniettiva e suriettiva, per cui,  $\text{Ker } f = O$  e  $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 3.26.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, -y - 2z, -3x + y)$ . Provare che  $f$  è invertibile, e trovare  $f^{-1}$ .

**SOLUZIONE.** Troviamo la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica  $B$  di  $\mathbb{R}^3$ . dalla definizione di  $f$  segue che:

$$\begin{aligned} f(\vec{i}) &= (1, 0, -3) = \vec{i} - 3\vec{k}, \\ f(\vec{j}) &= (2, -1, 1) = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \\ f(\vec{k}) &= (1, -2, 0) = \vec{i} - 2\vec{j}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  ha determinante  $11 \neq 0$ . Quindi,  $A$  è invertibile, per cui,  $f$  è invertibile. L'inversa di  $A$  è stata calcolata nell'Es. 1.20:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/11 & 1/11 & -3/11 \\ 6/11 & 3/11 & 2/11 \\ -3/11 & -7/11 & -1/11 \end{pmatrix}.$$

Poichè  $A = M_B(f)$ ,  $A^{-1} = M_B(f^{-1})$ , quindi, per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x, y, z) &= A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2x + y - 3z \\ 6x + 3y + 2z \\ -3x - 7y - z \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{11}(2x + y - 3z, 6x + 3y + 2z, -3x - 7y - z). \end{aligned}$$

**Esercizio 3.27.** Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare, la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche  $B$  e  $B'$  di  $\mathbb{R}^4$  ed  $\mathbb{R}^3$  rispettivamente è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Dire se  $f$  è iniettiva o suriettiva.

b) Trovare  $f^{-1}(L(\vec{u}))$ , dove  $\vec{u} = (1, 2, 3)$ .

**SOLUZIONE.** a)  $\vec{v} = (x, y, z, t) \in \text{Ker } f$  se e solo se

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 0, \\ y + 6z - t = 0 \\ x - 3z + t = 0, \end{cases}$$

che ha soluzione  $x + t = y - t = z = 0$ . Pertanto,

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = y - t = z = 0\} \\ &= \{(a, -a, 0, -a) \mid a \in \mathbb{R}\} = L((1, -1, 0, -1)). \end{aligned}$$

Poiché  $\text{Ker } f$  non è il sottospazio nullo,  $f$  non è iniettiva. Dal Teorema del rango segue che

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Ker } f = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Quindi,  $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$ , cioè,  $f$  è suriettiva.

b) Poiché  $L(\vec{u}) = \{(b, 2b, 3b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ , si ha che  $\vec{v} = (x, y, z, t) \in f^{-1}(L(\vec{u}))$  se e solo se esiste  $b \in \mathbb{R}$  per cui

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2b \\ 3b \end{pmatrix},$$

cioè,

$$\begin{cases} x + 2y + z - t = b, \\ y + 6z - t = 2b \\ x - 3z + t = 3b, \end{cases}$$

La matrice del sistema è  $A$ , e  $\text{rg } A = \dim \text{Im } f = 3$ . Poiché la matrice completa del sistema è di tipo  $3 \times 5$ , anch'essa ha rango 3. Quindi, il Teorema di Rouché–Capelli assicura la compatibilità del sistema, per ogni  $b \in \mathbb{R}$ . Cerchiamo una soluzione particolare  $\vec{v}_0$ , dopodiché la soluzione generale sarà data da  $\vec{v}_0 + \text{Ker } f$ . Ad esempio, richiedendo in più che  $t = 0$ , otteniamo la soluzione particolare  $x = \frac{21}{4}b, y = -\frac{5}{2}b, z = \frac{3}{4}b, t = 0$ . Pertanto,

$$f^{-1}(L(\vec{u})) = \left( \frac{21}{4}b, -\frac{5}{2}b, \frac{3}{4}b, 0 \right) + \text{Ker } f = \left\{ \left( a + \frac{21}{4}b, -a - \frac{5}{2}b, \frac{3}{4}b, -a \right) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Esercizio 3.28.** Si considerino gli endomorfismi  $f$  di  $\mathbb{R}^3$  così definiti, al variare di  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$f_a(x, y, z) = (ax, x + y + az, z).$$

Descrivere  $\text{Ker } f_a$  ed  $\text{Im } f_a$  al variare di  $a$ .

SOLUZIONE.  $\text{Ker } f_a = \{(x, y, z) \mid ax = 0, x + y + az = 0, z = 0\}$ . Se  $a \neq 0$ ,  $\text{Ker } f_a = \{\vec{0}\}$  e quindi  $f_a$  è un isomorfismo. Se  $a = 0$ ,  $\text{Ker } f_a = \{(t, -t, 0)\} = \mathcal{L}((1, -1, 0))$ . Ovviamente, se  $a \neq 0$ ,  $\text{Im } f_a = \mathbb{R}^3$ , mentre se  $a = 0$  si ha  $\text{Im } f_0 = \{(0, k, h)\} = \mathcal{L}(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

**Esercizio 3.29.** Sia  $\mathbb{R}_2[t]$  lo spazio vettoriale dei polinomi su  $\mathbb{R}$  di grado  $\leq 2$  e  $\mathcal{B} = \{t^2, t, 1\}$  la sua base canonica. Si consideri l'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}_2[t]$  così definito

$$f(t^2) = (t+1)^2, \quad f(t) = 2(t^2+1), \quad f(1) = (t+1)^2.$$

1.  $f$  è un isomorfismo?
2. Determinare la matrice  $A$  associata ad  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .
3. Determinare  $\text{Ker } f$  ed  $\text{Im } f$  come sottospazi di  $\mathbb{R}_2[t]$ .

SOLUZIONE.

1. Poiché  $f(t^2) = f(1)$ , l'applicazione  $f$  non è iniettiva e quindi non è un isomorfismo.
2.  $f(t^2) = t^2 + 2t + 1$ ,  $f(t) = 2t^2 + 2$ ,  $f(1) = t^2 + 2t + 1$ , quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Indichiamo con  $p(t) = at^2 + bt + c$  il generico elemento di  $\mathbb{R}_2[t]$ . Allora

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{at^2 + bt + c \mid a + 2b + c = 0, 2a + 2c = 0\} \\ &= \{at^2 + bt + c \mid b = 0, a + c = 0\} \\ &= \{a(t^2 - 1) \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathcal{L}((t^2 - 1)) \\ \text{Im } f &= \mathcal{L}(t^2 + 2t + 1, 2t^2 + 2) \end{aligned}$$

**Esercizio 3.30.** Sia  $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ ,  $p(x) \mapsto xp'(x)$ .

- a) Provare che  $f$  è lineare. Esplicitare  $f$ .
- b) Trovare  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$  e le loro dimensioni.
- c) Trovare  $f(V)$ , dove  $V = \{ax^2 + bx - b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ .

SOLUZIONE.

- a) Per ogni  $p, q \in \mathbb{R}_3[x]$  e  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f(p+q) &= x(p+q)'(x) = xp'(x) + xq'(x) = f(p) + f(q) \\ f(ap) &= x(ap)'(x) = xap'(x) = a \cdot xp'(x) = af(p). \end{aligned}$$

Pertanto,  $f$  è un'applicazione lineare.

Sia  $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  un generico elemento di  $\mathbb{R}_3[x]$ . Allora

$$f(p) = xp'(x) = x(3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) = 3\alpha x^3 + 2\beta x^2 + \gamma x.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta &\longmapsto 3\alpha x^3 + 2\beta x^2 + \gamma x. \end{aligned}$$

b)  $p \in \text{Ker } f$  se e solo se  $f(p) = 0$ , dove 0 è il polinomio nullo. Quindi,  $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \in \text{Ker } f$  se e solo se  $3\alpha x^3 + 2\beta x^2 + \gamma x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , che, per il principio di identità dei polinomi, dà  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Pertanto,

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid xp'(x) = 0\} = \{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \in \mathbb{R}_3[x] \mid \alpha = \beta = \gamma = 0\} \\ &= \{p(x) = \delta \mid \delta \in \mathbb{R}\} = L(1). \end{aligned}$$

In altri termini,  $\text{Ker } f$  è il sottospazio dei polinomi di  $\mathbb{R}_3[x]$  di grado 0. In particolare,  $\{1\}$  è una base di  $\text{Ker } f$ , per cui,  $\dim \text{Ker } f = 1$ .

Considerata ad esempio la base canonica  $\{1, x, x^2, x^3\}$  di  $\mathbb{R}_3[x]$ , poiché  $\mathbb{R}_3[x]$  è generato da  $\{1, x, x^2, x^3\}$ , si ha  $\text{Im } f = L(f(1), f(x), f(x^2), f(x^3))$ . Dall'espressione esplicita di  $f$  otteniamo

$$f(1) = x \cdot (1)' = 0, \quad f(x) = x \cdot (x)' = x, \quad f(x^2) = x \cdot (x^2)' = 2x^2, \quad f(x^3) = x \cdot (x^3)' = 3x^3.$$

Quindi,  $\text{Im } f = L(x, 2x^2, 3x^3) = L(x, x^2, x^3) = \{0\} \cup \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid \deg(p) \geq 1\}$ , dove  $\deg(p)$  è il grado di  $p$ . In particolare,  $\{x, x^2, x^3\}$  è una base di  $\text{Im } f$ , per cui  $\dim \text{Im } f = 3$ .

c) Se  $p \in V$ , allora esistono  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $p(x) = ax^2 + b(x - 1)$ . Pertanto,  $V = L(p_1, p_2)$ , dove  $p_1(x) = x^2$ ,  $p_2(x) = x - 1$ . Quindi,  $f(V) = L(f(p_1), f(p_2)) = L(2x^2, x) = L(x^2, x)$ .

**Esercizio 3.31.** Sia  $f : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$  tale che  $X \mapsto X + X^t$ .

a) Provare che  $f$  è lineare ed esplicitare  $f$ .

b) Trovare  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$  e una loro base.

c) Dato  $V = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \text{tr}(X) = 0\}$ , trovare  $f(V)$ .

SOLUZIONE.

a) Per ogni  $X, Y \in \mathbb{R}^{2,2}$  e  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(X + Y) &= X + Y + (X + Y)^t = X + Y + X^t + Y^t = \\ &= X + X^t + Y + Y^t = f(X) + f(Y), \\ f(aX) &= aX + (aX)^t = aX + aX^t = a(X + X^t) = af(X). \end{aligned}$$

Pertanto,  $f$  è un'applicazione lineare.

Sia  $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ . Allora

$$f(X) = X + X^t = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} & x_{12} + x_{21} \\ x_{12} + x_{21} & 2x_{22} \end{pmatrix}.$$

Quindi,

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2,2}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_{11} & x_{12} + x_{21} \\ x_{12} + x_{21} & 2x_{22} \end{pmatrix}.$$

b)  $X \in \text{Ker } f$  se e solo se  $f(X) = O$ , dove  $O$  è la matrice nulla. Quindi,  $X = (x_{ij}) \in \text{Ker } f$  se e solo se  $X + X^t = O$ , che, espressa in termini di coefficienti  $x_{ij}$ , dà  $x_{11} = x_{22} = x_{12} + x_{21} = 0$ . Pertanto,

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid X + X^t = 0\} = \{X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{2,2} \mid x_{11} = x_{22} = x_{12} + x_{21} = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = L(X_1), \end{aligned}$$

dove  $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Considerata ad esempio la base canonica  $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  di  $\mathbb{R}^{2,2}$ , poichè  $\mathbb{R}^{2,2} = L(E_1, E_2, E_3, E_4)$ , si ha  $\text{Im } f = L(f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4))$ . Dall'espressione esplicita di  $f$  otteniamo

$$f(E_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e, analogamente,

$$f(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(E_4) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi,  $\text{Im } f = L(A_1, A_2, A_3)$ , dove  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Si osservi che  $\text{Ker } f = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid X = -X^t\} = \mathcal{A}$ , sottospazio delle matrici antisimmetriche, mentre  $\text{Im } f = \mathcal{S}$ , sottospazio delle matrici simmetriche.

c)  $V$  è il sottospazio delle matrici a traccia nulla, ed ha dimensione 3 (v. Es. 3.10). Possiamo provare facilmente che  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  è una base di  $V$ . Di conseguenza,  $f(V) = L(f(V_1), f(V_2), f(V_3))$ . Poiché si calcola facilmente che  $f(V_1) = 2V_1$  e  $f(V_2) = f(V_3) = A_2$ , possiamo concludere che

$$f(V) = L(V_1, A_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Esercizio 3.32.** Sia dato lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  con la base canonica  $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ .

1. Provare che i vettori  $\vec{v}_1(1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_2(0, 1, -1)$ ,  $\vec{v}_3(0, 0, 2)$  formano una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$ .
2. Dato l'endomorfismo  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$f(\vec{v}_1) = (3, 1, 0), \quad f(\vec{v}_2) = (-1, 0, 2), \quad f(\vec{v}_3) = (0, 2, 0),$$

determinare la matrice associata ad  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$  e rispetto a  $\mathcal{C}$ .

SOLUZIONE. Il primo punto è ovvio. Si può risolvere il secondo punto con due metodi.

*I metodo.* Per scrivere  $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$  bisogna conoscere  $f(\vec{e}_i)$  nella base  $\mathcal{C}$ . Indicata con  $B$  la matrice di passaggio da  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{B}$ , si ha

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \\ \vec{v}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \\ \vec{v}_3 = 2\vec{e}_3, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{v}_1 - 1/2\vec{v}_3, \\ \vec{e}_2 = \vec{v}_2 + 1/2\vec{v}_3, \quad \vec{e}_3 = 1/2\vec{v}_3. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

da cui

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $B^{-1}$  si può calcolare direttamente o risolvendo il sistema (3.2.1 simbolicamente rispetto alle  $\vec{e}_i$ .

$$\begin{cases} f(\vec{v}_1) = f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_3) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ f(\vec{v}_2) = f(\vec{e}_2) - f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3, \\ f(\vec{v}_3) = 2f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1, \\ f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \\ f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2, \end{cases}$$

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  bisogna conoscere  $f(\vec{v}_i)$  nella base  $\mathcal{B}$ .

$$\begin{cases} f(\vec{v}_1) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = 3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \\ f(\vec{v}_2) = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 = -\vec{v}_1 + 3/2\vec{v}_3, \\ f(\vec{v}_3) = 2\vec{e}_2 = 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3, \end{cases}$$

$$A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che  $A' = B^{-1}AB$ .

*II metodo.* Dai dati del problema segue direttamente

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

e usando le formule per il cambiamento di base

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_C^C(f) &= \mathcal{M}_C^C(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \cdot \mathcal{M}_B^C(f) \cdot \mathcal{M}_C^B(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}), \\ \mathcal{M}_B^B(f) &= \mathcal{M}_C^B(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \cdot \mathcal{M}_B^C(f) \cdot \mathcal{M}_B^B(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}),\end{aligned}$$

tenendo presente che  $\mathcal{M}_C^C(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathcal{M}_C^C(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Id}$ , matrice identità, e che

$$B = \mathcal{M}_B^C(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}), \quad B^{-1} = \mathcal{M}_C^B(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

### 3.3 Autovalori ed autovettori

**Esercizio 3.33.** *Siano  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$ , e  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo. Provare che*

- a)  $f$  è invertibile  $\Leftrightarrow 0$  non è un autovalore di  $f$ ;  
 b) Se  $\lambda \in \mathbb{K}$  è autovalore di  $f$  ed  $f$  è invertibile, allora  $\lambda^{-1}$  è autovalore di  $f^{-1}$ .

SOLUZIONE. a) Poiché  $\dim V$  è finita, dal Teorema del rango segue:

$f$  è invertibile  $\Leftrightarrow f$  è iniettiva  $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow f(\vec{x}) \neq \vec{0}$  per ogni  $\vec{x} \in V \Leftrightarrow \nexists \vec{x} \in V$  tale che  $\vec{x} \neq \vec{0}$  e  $f(\vec{x}) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{x} \Leftrightarrow 0$  non è autovalore per  $f$ .

b) Poiché  $\lambda$  è autovalore di  $f$ , esiste  $\vec{x} \neq \vec{0} \in V$  tale che  $f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$ . Allora,

$$\vec{x} = f^{-1}(f(\vec{x})) = f^{-1}(\lambda \vec{x}) = \lambda f^{-1}(\vec{x}).$$

Poiché  $f$  è invertibile,  $\lambda \neq 0$  (vedi a)), quindi  $f^{-1}(\vec{x}) = \lambda^{-1} \vec{x}$ , con  $\vec{x} \neq 0$ , cioè,  $\lambda^{-1}$  è autovalore di  $f^{-1}$ .

**Esercizio 3.34.** *Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $(x, y) \mapsto (0, x)$ .*

- a) *Trovare autovalori ed autovettori di  $f$ , e dire se  $f$  è semplice.*  
 b) *Dire se  $\mathbb{R}^2 = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ .*

SOLUZIONE. a) Poiché  $f(1, 0) = (0, 1)$  e  $f(0, 1) = (0, 0)$ , la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  di  $\mathbb{R}^2$  è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di  $f$  sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2.$$

Quindi, l'unico autovalore di  $f$  è  $\lambda = 0$ , di molteplicità algebrica 2. Troviamo il relativo autospazio,  $V(0) = \text{Ker } f$ :

$$f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (0, x) = (0, 0) \Leftrightarrow x = 0,$$

per cui,  $V(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} = \{(0, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = L((0, 1))$ . Poiché la molteplicità geometrica di 0 è  $\dim V(0) = 1$  mentre la molteplicità algebrica è 2,  $f$  non è semplice.

b)  $\text{Im } f = L(f(1, 0), f(0, 1)) = L((0, 1), (0, 0)) = L((0, 1)) = \text{Ker } f$ . Pertanto,  $\mathbb{R}^2 \neq \text{Ker } f + \text{Im } f = \text{Ker } f$ .

**Esercizio 3.35.** *Dati i vettori  $\vec{u} = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{v} = (-1, 0, 1)$  e  $\vec{w} = (0, -1, 2)$  in  $\mathbb{R}^3$ , trovare un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  siano autovettori relativi rispettivamente agli autovalori 1,  $-1$  e 0. Un tale endomorfismo è unico?*

SOLUZIONE. La matrice delle componenti di  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$  è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

che ha rango 3, poichè il suo determinante è  $-1 \neq 0$ . Quindi,  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  sono linearmente indipendenti, per cui formano una base di  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo ora che  $f$  sia un endomorfismo tale che  $u, v$  e  $w$  siano autovalori relativi a 1,  $-1, 0$  rispettivamente. Allora, risulta  $f(\vec{u}) = \vec{u}$ ,  $f(\vec{v}) = -\vec{v}$  e  $f(\vec{w}) = \vec{0}$  e quindi, la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base  $B' = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, un tale endomorfismo esiste ed inoltre è unico, poichè, fissata la base  $B' = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ , esiste un unico endomorfismo  $f$  avente  $A$  come matrice associata rispetto a  $B'$ .

**Esercizio 3.36.** *Con riferimento all'endomorfismo  $f$  dell'esercizio 3.18, stabilire se  $f$  ed  $f^3$  sono semplici.*

SOLUZIONE. Gli autovalori di  $A$  sono le radici reali dell'equazione caratteristica

$$|A - \lambda \text{Id}| = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0.$$

Poiché esistono radici non reali,  $A$  non è diagonalizzabile e quindi  $f$  non è semplice. Invece

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essendo  $A^3$  diagonale,  $f^3$  è semplice.

**Esercizio 3.37.** Si considerino lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  con la struttura euclidea standard e l'endomorfismo

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \left( \frac{1}{2}x + ay, \frac{h}{a}x - \frac{1}{2}y, z \right)$$

con  $a, h \in \mathbb{R}$  ed  $a \neq 0$ .

1. Descrivere, al variare dei parametri  $a$  ed  $h$ , i sottospazi  $\text{Ker } f$  ed  $\text{Im } f$ .
2. Posto  $h = \frac{3}{4}$ , trovare per quali valori di  $a$  l'applicazione  $f$  è semplice.

SOLUZIONE.

1. Per trovare  $\text{Ker } f$  consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + ay = 0, \\ \frac{h}{a}x - \frac{1}{2}y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & 0 \\ \frac{h}{a} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora  $\det A = -\frac{1}{4} - h$ .

Per  $h \neq -\frac{1}{4}$  ed  $a$  arbitrario si ha  $\text{Ker } f = 0$  e  $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$ .

Per  $h = -\frac{1}{4}$  ed  $a$  arbitrario si ha

$$\text{Ker } f = \{(-2at, t, 0)\}, \quad \text{Im } f = \mathcal{L}((2a, -1, 0), (0, 0, 1)).$$

Quindi,  $\dim \text{Ker } f = 1$ ,  $\dim \text{Im } f = 2$  in questo caso.

2. Gli autovalori sono le radici reali dell'eq. caratteristica seguente (con  $h = \frac{3}{4}$ ):

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0,$$

quindi  $\lambda = 1$  con molteplicità 2 e  $\lambda = -1$  con molteplicità 1.

L'autospazio corrispondente a  $\lambda = 1$  è  $V(1) = \{(2ay, y, z)\}$ , quindi  $\dim V(1) = 2$  per ogni  $a$ . Ne segue che, per  $h = 3/4$ , l'applicazione  $f$  è semplice per ogni  $a$ .

**Esercizio 3.38.** Con riferimento all'esercizio 3.22, e considerando  $\mathbb{R}^3$  con la struttura euclidea standard, dire per quali valori di  $k$  l'endomorfismo  $f_k$  è semplice.

SOLUZIONE. Gli autovalori di  $f_k$  sono le radici reali del polinomio caratteristico

$$\det(A_k - \lambda I) = (\lambda^2 - k)(1 - \lambda).$$

Quindi se  $k > 0$  e  $k \neq 1$ , l'endomorfismo  $f_k$  è semplice poiché ha tre autovalori reali distinti  $\pm\sqrt{k}$ , 1; se  $k < 0$ ,  $f_k$  non è semplice poiché le radici del polinomio caratteristico

non sono tutte reali; se  $k = 1$  gli autovalori sono  $\lambda_1 = 1$  con molteplicità algebrica 2 e  $\lambda_2 = -1$ , e risulta

$$\begin{aligned} V(1) &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0, x = 0, -y - z = 0 \} \\ &= \{ (0, t, -t) \mid t \in \mathbb{R} \}, \end{aligned}$$

quindi  $\dim V(1) = 1$  ed  $f_1$  non è semplice.

**Esercizio 3.39.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , endomorfismo, tale che  $\text{Ker } f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0 \}$  e  $V(1) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = z = 0 \}$ .

a) Provare che  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus V(1)$ .

b) Interpretare geometricamente  $f$ , dire se  $f$  è semplice e, in tal caso, trovare una base di autovettori.

c) Trovare  $M_B(f)$ , dove  $B$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

SOLUZIONE. a) La somma di  $\text{Ker } f = V(0)$  e  $V(1)$  è diretta, essendo autospazi relativi ad autovalori distinti. Osserviamo che

$$\text{Ker } f = \{ (a, 2a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \} = L((1, 2, 0), (0, 0, 1)),$$

da cui segue facilmente che  $\dim \text{Ker } f = 2$ , e

$$V(1) = \{ (-2c, c, 0) \mid c \in \mathbb{R} \} = L((-2, 1, 0)).$$

Dalla relazione di Grassmann:

$$\dim(\text{Ker } f \oplus V(1)) = \dim \text{Ker } f + \dim V(1) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3,$$

per cui,  $\text{Ker } f \oplus V(1) = \mathbb{R}^3$ .

b) Gli autovalori di  $f$  sono  $\lambda_1 = 1$ , di molteplicità geometrica  $\dim V(1) = 1$ , e  $\lambda_2 = 0$ , di molteplicità geometrica  $\dim \text{Ker } f = 2$ . Poiché  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus V(1) = V(0) \oplus V(1)$ , possiamo concludere che  $f$  è semplice. Otteniamo una base di autovettori unendo una base di  $\text{Ker } f$  con una base di  $V(1)$ . Ad esempio,  $\{(1, 2, 0), (0, 0, 1), (-2, 1, 0)\}$  è una base di autovettori per  $f$ . Per interpretare geometricamente  $f$ , osserviamo che

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus V(1) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} = \vec{u} + \vec{v} &\longmapsto v. \end{aligned}$$

Quindi,  $f$  annulla la componente del vettore  $\vec{x}$  in  $\text{Ker } f$ , e lascia invariata la componente in  $V(1)$ . Osserviamo infine che  $\text{Ker } f$  e  $V(1)$  sono sottospazi ortogonali di  $\mathbb{R}^3$  rispetto al prodotto scalare standard. Pertanto, possiamo concludere che  $f$  è la proiezione ortogonale sulla retta  $V(1)$ .

c) Risulta:

$$\begin{cases} f(\vec{i}) + 2f(\vec{j}) = f(1, 2, 0) = (0, 0, 0), \\ f(\vec{k}) = f(0, 0, 1) = (0, 0, 0), \\ -2f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = f(-2, 1, 0) = (-2, 1, 0) = -2\vec{i} + \vec{j}, \end{cases}$$

e quindi, otteniamo

$$f(\vec{i}) = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{2}{5}\vec{j}, \quad f(\vec{j}) = -\frac{2}{5}\vec{i} + \frac{1}{5}\vec{j}, \quad f(\vec{k}) = 0.$$

Quindi, la matrice associata a  $f$  rispetto a  $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  è

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.40.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , endomorfismo, tale che

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 3 & 2 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove  $B$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e  $h \in \mathbb{R}$ .

a) Dire per quali valori di  $h$ ,  $f$  è un isomorfismo.

b) Dire per quali valori di  $h$ ,  $f$  è semplice.

SOLUZIONE. a)  $f$  è un isomorfismo  $\Leftrightarrow f$  è invertibile  $\Leftrightarrow A = M_B(f)$  è invertibile  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ . Poichè  $\det A = 2 - 2h^2$ , concludiamo che  $f$  è un isomorfismo se e solo se  $h \neq \pm 1$ .

b) Gli autovalori di  $f$  sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & h \\ 3 & 2 - \lambda & 1 \\ h & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda - 1 + h)(\lambda - 1 - h).$$

Quindi, gli autovalori di  $f$  sono  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1 - h$ ,  $\lambda_3 = 1 + h$ , e la loro molteplicità dipende da  $h \in \mathbb{R}$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \lambda_3 &\Leftrightarrow h = 0, \\ \lambda_1 = \lambda_2 &\Leftrightarrow h = -1, \\ \lambda_1 = \lambda_3 &\Leftrightarrow h = 1. \end{aligned}$$

Quindi, se  $h \neq 0, 1, -1$ , allora  $f$  ha 3 autovalori a due a due distinti, e quindi,  $f$  è semplice. Restano da esaminare i casi  $h = 0$ ,  $h = 1$  e  $h = -1$ .

Supponiamo prima che  $h = 0$ . Gli autovalori di  $f$  in tal caso sono  $\lambda_1 = 2$ , di molteplicità (algebraica, e quindi anche geometrica) 1, e  $\lambda_2 = 1$ , di molteplicità algebrica 2. Troviamo la molteplicità geometrica di 1, cioè,  $\dim V(1)$ . Gli elementi di  $V(1)$  sono i vettori di  $\mathbb{R}^3$  le cui componenti  $x, y, z$  soddisfano

$$0 = (A - I)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo  $3x + y + z = 0$ . Pertanto,

$$\begin{aligned} V(1) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y + z = 0\} = \{(a, b, -3a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \\ &= L((1, 0, -3), (0, 1, -1)). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che  $(1, 0, -3)$  e  $(0, 1, -1)$  sono linearmente indipendenti, quindi la molteplicità geometrica di 1 è  $\dim V(1) = 2$  e coincide con la molteplicità algebrica. Poiché il polinomio caratteristico è interamente decomponibile in  $\mathbb{R}$  e per ogni autovalore molteplicità algebrica e geometrica coincidono, possiamo concludere che, per  $h = 0$ ,  $f$  è semplice.

Sia ora  $h = 1$ . Gli autovalori di  $f$  in tal caso sono  $\lambda_1 = 2$ , di molteplicità algebrica 2, e  $\lambda_2 = 0$ , di molteplicità (algebraica, e quindi anche geometrica) 1. Troviamo la molteplicità geometrica di 2. Gli elementi di  $V(2)$  sono i vettori di  $\mathbb{R}^3$  le cui componenti  $x, y, z$  soddisfano

$$0 = (A - 2I)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo  $x = z = 0$ . Pertanto,

$$V(2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\} = L((0, 1, 0)).$$

Poiché la molteplicità geometrica di  $\lambda_1 = 2$  è  $\dim V(2) = 1$ , mentre la molteplicità algebrica è 2, possiamo concludere che, per  $h = 1$ ,  $f$  non è semplice.

Sia infine  $h = -1$ . Gli autovalori di  $f$  in tal caso sono  $\lambda_1 = 2$ , di molteplicità algebrica 2, e  $\lambda_3 = 0$ , di molteplicità (algebraica, e quindi anche geometrica) 1. Gli elementi di  $V(2)$  sono i vettori di  $\mathbb{R}^3$  le cui componenti  $x, y, z$  soddisfano

$$0 = (A - 2I)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo  $x = z = 0$ . Pertanto,  $V(2) = L((0, 1, 0))$ . Poiché la molteplicità geometrica di  $\lambda_1 = 2$  è  $\dim V(2) = 1$ , mentre la molteplicità algebrica è 2, possiamo concludere che, per  $h = -1$ ,  $f$  non è semplice.

**Esercizio 3.41.** *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dove  $k \in \mathbb{R}$ .

a) *Trovare gli autovalori di  $A$ .*

b) *Dire per quali valori di  $k$ ,  $A$  è diagonalizzabile.*

SOLUZIONE. a) Fissati uno spazio vettoriale di dimensione 4 (ad esempio,  $\mathbb{R}^4$ ) e una sua base (ad esempio, quella canonica  $B$ ), la matrice  $A$  determina univocamente un endomorfismo  $f$  di tale spazio vettoriale, la cui matrice associata, rispetto alla fissata base, è  $A$ . Gli autovalori di  $A$  sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & k & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Quindi, gli autovalori di  $f$  sono  $\lambda_1 = 1$ , di molteplicità algebrica 2,  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = 2$ , questi ultimi di molteplicità (algebrica, e quindi anche geometrica) 1, per ogni  $k \in \mathbb{R}$ .

b)  $A$  è diagonalizzabile se e solo se  $f$  è semplice. Visto che per  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  le molteplicità algebriche e geometriche coincidono,  $f$  è semplice se e solo se  $\dim V(1) = 2$ , perchè in tal caso anche per  $\lambda_1 = 1$  le molteplicità algebrica e geometrica coincidono. Gli elementi di  $V(1)$  sono individuati da quadruple  $(x, y, z, t)$  di componenti rispetto alla fissata base, tali che

$$0 = (A - I)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo  $y = t = kz = 0$ . Pertanto, dobbiamo distinguere due casi.

Se  $k \neq 0$ , allora le soluzioni sono date da  $y = z = t = 0$ , ossia, dalle quadruple  $(x, 0, 0, 0) = x(1, 0, 0, 0)$ . Pertanto,  $\dim V(1) = 1 \neq 2$ , e quindi, se  $k \neq 0$ , allora  $A$  non è diagonalizzabile.

Se  $k = 0$ , le soluzioni sono date da  $y = t = 0$ , cioè dalle quadruple  $(x, 0, z, 0) = x(1, 0, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0)$ . In tal caso,  $\dim V(1) = 2$  e quindi, per  $k = 0$ ,  $A$  è diagonalizzabile. Naturalmente in tal caso una matrice diagonale simile ad  $A$  è quella avente lungo la diagonale principale gli autovalori 1 (2 volte),  $-1$  e 2.

**Esercizio 3.42.** *Sia  $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ ,  $(x, y, z) \mapsto (x - z, 2y, x + y + z)$ .*

a) *Trovare gli autovalori di  $f$ , per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e per  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .*

b) *Dire se  $f$  è semplice, per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e per  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .*

SOLUZIONE. a),b) Dall'espressione di  $f$  si ricava (sia per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  che per  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ )

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (1, 0, 1) = (1, 0, 0) + (0, 0, 1), \\ f(0, 1, 0) &= (0, 2, 1) = 2(0, 1, 0) + (0, 0, 1), \\ f(0, 0, 1) &= (-1, 0, 1) = -(1, 0, 0) + (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Pertanto, in entrambi i casi, la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di  $f$  sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 + 1].$$

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , l'unico autovalore reale di  $f$  è quindi  $\lambda_1 = 2$ , di molteplicità algebrica 1. Poiché il polinomio caratteristico di  $f$  non è interamente decomponibile in  $\mathbb{R}$ , possiamo concludere che  $f$  non è semplice.

Se invece  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , gli autovalori di  $f$  sono  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1 - i$  e  $\lambda_3 = 1 + i$ , tutti di molteplicità algebrica, e quindi anche geometrica, uguale a 1. Poiché  $f$  è definita su uno spazio vettoriale,  $\mathbb{C}^3$ , di dimensione 3 su  $\mathbb{C}$ , ed ha 3 autovalori complessi a due a due distinti, concludiamo che  $f$  è semplice.

**Esercizio 3.43.** *Si consideri l'endomorfismo*

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (-y, x, 2z).$$

*Dire se  $f$  è semplice. Se si sostituisce  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{C}^3$ ,  $f$  rimane un endomorfismo semplice?*

SOLUZIONE. Poiché  $f$  ammette solo un autovalore reale  $\lambda = 2$  di molteplicità algebrica 1, l'endomorfismo non è semplice. Mentre lo stesso endomorfismo, pensato su  $\mathbb{C}^3$ , cioè

$$f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad f(x, y, z) = (-y, x, 2z),$$

ha tre autovalori distinti  $\pm i, 2$ , quindi è semplice.

**Esercizio 3.44.** *Sia  $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  endomorfismo, tale che  $f(\vec{e}_1) = -k\vec{e}_2$ ,  $f(\vec{e}_2) = k\vec{e}_1$ ,  $f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_3$ , dove  $k \in \mathbb{C}$  e  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  è la base canonica di  $\mathbb{C}^3$ .*

a) *Dire per quali  $k \in \mathbb{C}$ ,  $f$  è invertibile, e scrivere  $M_B(f^{-1})$ .*

b) *Dire per quali  $k \in \mathbb{C}$ ,  $f$  è semplice.*

SOLUZIONE. a) Dalle condizioni elencate otteniamo subito che la matrice associata a  $f$  rispetto a  $B$  è

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$f$  è invertibile se e solo se  $A$  è invertibile, ossia  $\det A = 2k^2 \neq 0$ . Quindi,  $f$  è invertibile se e solo se  $k \neq 0$ . Troviamo ora  $M_B(f^{-1})$ , per  $k \neq 0$ .

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = -k\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_1 = f^{-1}(-k\vec{e}_2) = -kf^{-1}(\vec{e}_2) \Rightarrow f^{-1}(\vec{e}_2) = -\frac{1}{k}\vec{e}_1, \\ f(\vec{e}_2) = k\vec{e}_1 \Rightarrow \vec{e}_2 = f^{-1}(k\vec{e}_1) = kf^{-1}(\vec{e}_1) \Rightarrow f^{-1}(\vec{e}_1) = \frac{1}{k}\vec{e}_2, \\ f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{e}_3 = f^{-1}(2\vec{e}_3) = 2f^{-1}(\vec{e}_3) \Rightarrow f^{-1}(\vec{e}_3) = \frac{1}{2}\vec{e}_3. \end{cases}$$

Pertanto,

$$M_B(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{k} & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Gli autovalori di  $f$  sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & k & 0 \\ -k & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 + k^2) = (2 - \lambda)(\lambda^2 \pm ik),$$

cioè,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -ik$ ,  $\lambda_3 = ik$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \lambda_3 &\Leftrightarrow k = 0, \\ \lambda_1 = \lambda_2 &\Leftrightarrow k = 2i, \\ \lambda_1 = \lambda_3 &\Leftrightarrow k = -2i. \end{aligned}$$

Quindi, se  $k \neq 0, 2i, -2i$ , allora  $f$  ha 3 autovalori a due a due distinti, e quindi,  $f$  è semplice. Restano da esaminare i casi  $k = 0$ ,  $k = 2i$  e  $k = -2i$ .

Supponiamo prima che  $k = 0$ . Gli autovalori di  $f$  in tal caso sono  $\lambda_1 = 2$ , di molteplicità (algebraica, e quindi anche geometrica) 1, e  $\lambda_2 = 0$ , di molteplicità algebrica 2. Troviamo la molteplicità geometrica di 0, cioè,  $\dim V(0) = \dim \text{Ker } f$ . Gli elementi di  $V(0)$  sono i vettori di  $\mathbb{C}^3$  le cui componenti  $x, y, z$  soddisfano

$$0 = AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo  $2z = 0$ . Pertanto,

$$\begin{aligned} V(0) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z = 0\} = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{C}\} = \\ &= L((1, 0, 0), (0, 1, 0)). \end{aligned}$$

Quindi, la molteplicità geometrica di 0 è  $\dim V(0) = 2$  e coincide con la molteplicità algebrica. Poiché il polinomio caratteristico è interamente decomponibile in  $\mathbb{C}$  e per ogni autovalore molteplicità algebrica e geometrica coincidono, possiamo concludere che, per  $k = 0$ ,  $f$  è semplice.

Sia ora  $k = 2i$ . Gli autovalori di  $f$  in tal caso sono  $\lambda_1 = 2$ , di molteplicità algebrica 2, e  $\lambda_2 = -2$ , di molteplicità (algebrica, e quindi anche geometrica) 1. Troviamo la molteplicità geometrica di 2. Gli elementi di  $V(2)$  sono i vettori di  $\mathbb{C}^3$  le cui componenti  $x, y, z$  soddisfano

$$0 = AX = 2X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo  $x = iy$ . Pertanto,

$$V(2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = iy\} = L((i, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Poiché la molteplicità geometrica di  $\lambda_1 = 2$  è  $\dim V(2) = 2$ , possiamo concludere che, per  $k = 2i$ ,  $f$  è semplice.

Il caso  $k = -2i$  è analogo al caso  $k = 2i$ , ed è lasciato per esercizio.

**Esercizio 3.45.** Con riferimento all'esercizio 3.28,

1. dire per quali valori di  $a$  l'endomorfismo  $f_a$  è semplice;
2. nel caso  $a = 0$ , trovare la matrice associata ad  $f_a$  rispetto alla base

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 0), \vec{v}_2 = (-2, -1, 0), \vec{v}_3 = (1, 0, -1)\}$$

e dire se essa è diagonalizzabile.

SOLUZIONE.

1. La matrice associata ad  $f_a$  rispetto alla base canonica  $\mathcal{B}$  è

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ inoltre } \det(A - \lambda \text{Id}) = (a - \lambda)(1 - \lambda)^2,$$

quindi gli autovalori sono  $\lambda = a$  e  $\lambda = 1$  con molteplicità algebrica almeno 2. Ora

$$V(1) = \{(x, y, z) \mid (a - 1)x = 0, x + az = 0\}$$

Se  $a \neq 0, 1$  allora  $V(1) = \{(0, h, 0)\}$ ; quindi  $\dim V(1) = 1$  ed  $f_a$  non è semplice.

Se  $a = 0$  allora  $V(1) = \{(0, k_1, k_2)\}$ ; quindi  $\dim V(1) = 2$  ed  $f_0$  è semplice.

Se  $a = 1$ , allora  $V(1) = \{(h_1, h_2, -h_1)\}$ , quindi  $\dim V(1) = 2$  ed  $f_1$  non è semplice, poiché la molteplicità algebrica di  $\lambda = 1$  è 3.

2. La matrice del cambiamento della base è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \det P = -1 \neq 0.$$

Allora

$$\begin{aligned} \text{Adj}(P) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & P^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{B}}}(f_0) &= P^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_0)P = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si noti che  $P = \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ . Ora  $\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{B}}}(f_0)$  è diagonalizzabile poiché  $f_0$  è semplice, per quanto visto al punto precedente.

**Esercizio 3.46.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo associato, relativamente alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Provare che  $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$ .
2. Determinare, dopo aver osservato che esiste, una base di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $f$ .
3. L'espressione  $A^3 = 3A^2$ , dove  $A$  è la matrice data, è un'identità? Da  $A^3 = 3A^2$  si può dedurre  $A = 3I$ ?

SOLUZIONE.

1.  $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\} \Rightarrow \dim(\text{Ker } f) = 2,$   
 $\text{Im } f = \mathcal{L}(\vec{v}),$  dove  $\vec{v} = (1, 1, 1) \Rightarrow \dim(\text{Im } f) = 1.$   
 Quindi  $\text{Im } f = \{(h, h, h) \mid h \in \mathbb{R}\}.$  Si verifica immediatamente che  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{\vec{0}\}$
2.  $A$  è una matrice simmetrica, quindi esiste una base di autovettori.

$$\det(A - \lambda I) = 3\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ con molteplicità } 2 \text{ e } \lambda = 3.$$

Determiniamo una base di  $V(0)$  e  $V(3)$ . Per quanto visto al punto precedente, segue

$$\vec{u}_1 = (1, 0, -1), \quad \vec{u}_2 = (0, 1, -1), \quad \vec{u}_3 = (1, 1, 1).$$

3. Si verifica facilmente che  $A^2 = 3A$  e quindi  $A^3 = 3A^2$ . Poiché  $A$  non è invertibile non si può dedurre che  $A = 3I$ .

**Esercizio 3.47.** Con riferimento all'endomorfismo  $f$  dell'esercizio 3.29, dire se  $f$  è semplice e trovare gli autospazi relativi ad  $f$ .

SOLUZIONE.  $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, -2, 4$ . Gli autospazi avranno tutti dimensione 1. Più precisamente

$$\begin{aligned} V(0) &= \text{Ker } f = \mathcal{L}(t^2 - 1) \\ V(-2) &= \text{Ker}(f + 2\text{Id}) \\ &= \{ at^2 + bt + c \mid 3a + 2b + c = 0, 2a + 2b + 2c = 0, a + 2b + 3c = 0 \} \\ &= \{ a(t^2 - 2t + 1) \} = \mathcal{L}(t^2 - 2t + 1), \\ V(4) &= \text{Ker}(f - 4\text{Id}) \\ &= \{ at^2 + bt + c \mid -3a + 2b + c = 0, 2a - 4b + 2c = 0, a + 2b - 3c = 0 \} \\ &= \{ a(t^2 + t + 1) \} = \mathcal{L}(t^2 + t + 1). \end{aligned}$$

$f$  è sempre semplice poiché  $A$  è simmetrica.

**Esercizio 3.48.** Si consideri l'endomorfismo

$$f: \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}_3[t]$$

che rispetto alla base canonica  $\mathcal{P} = \{1, t, t^2, t^3\}$  è associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dire se  $f$  è semplice.

SOLUZIONE. Si vede facilmente che

$$\det(A - \lambda \text{Id}) = \lambda(\lambda + 2)^2(\lambda - 1),$$

quindi gli autovalori sono  $\lambda_1 = 0$  con  $m_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$  con  $m_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -2$  con  $m_3 = 2$ . Gli autospazi sono

$$\begin{aligned} V(0) &= \mathcal{L}(-t^2 + t^3) && \Rightarrow \dim V(0) = 1 \\ V(1) &= \mathcal{L}(2t - 3t^2 + 2t^3) && \Rightarrow \dim V(1) = 1 \\ V(-2) &= \mathcal{L}(1, t) && \Rightarrow \dim V(-2) = 2 \end{aligned}$$

quindi  $f$  è diagonalizzabile.

**Esercizio 3.49.** Si consideri l'endomorfismo  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definito da

$$f(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-2a_0, -2a_1 - 6a_2 - 6a_3, 3a_2 + 3a_3, -2a_2 - 2a_3)$$

e si veda se è semplice.

SOLUZIONE. L'esercizio è quello precedente poiché vale il seguente isomorfismo

$$\varphi: \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}^4, a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \mapsto (a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Naturalmente ora

$$\begin{aligned} V(0) &= \mathcal{L}(\vec{v}_1) & \vec{v}_1 &= (0, 0, -1, 1) \\ V(1) &= \mathcal{L}(\vec{v}_2) & \vec{v}_2 &= (0, 2, -3, 2) \\ V(-2) &= \mathcal{L}(\vec{v}_3, \vec{v}_4) & \vec{v}_3 &= (1, 0, 0, 0) \\ & & \vec{v}_4 &= (0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

La rappresentazione di  $f$  nella base  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_i\}$  è data dalla matrice diagonale

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.50.** Sia  $f: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ , endomorfismo, tale che  $f(x+1) = 4x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ ,  $f(x^3 - x^2 + 1) = 3x^3 - x^2 + 3x + 1$ ,  $f(x^3 + 2x^2 - 1) = -5x^3 + 5x^2 - 4x - 1$  e  $f(x^3) = -x^3$ .

a) Trovare  $A = M_B(f)$ , dove  $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ .

b) Trovare  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$ .

c) Provare che  $f$  è semplice, trovare una base  $B'$  di autovettori e la matrice  $P$  di passaggio dalla base canonica  $B$  a  $B'$ .

SOLUZIONE. a) Risulta:

$$\begin{cases} f(x) + f(1) = f(x+1) = 4x^3 + 5x^2 + 3x + 1, \\ f(x^3) - f(x^2) + f(1) = f(x^3 - x^2 + 1) = 3x^3 - x^2 + 3x + 1, \\ f(x^3) + 2f(x^2) - f(1) = f(x^3 + 2x^2 - 1) = -5x^3 + 5x^2 - 4x - 1, \\ f(x^3) = -x^3. \end{cases}$$

Risolvendo, otteniamo

$$\begin{cases} f(1) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1, \\ f(x) = 2x^2 + x, \\ f(x^2) = 4x^2 - x, \\ f(x^3) = -x^3. \end{cases}$$

Quindi, la matrice associata a  $f$  rispetto a  $B$  è

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b)  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \text{Ker } f$  se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} a = 0, \\ 2a + b - c = 0, \\ 3a + 2b + 4c = 0, \\ 4a - d = 0, \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione  $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ . Quindi,  $\text{Ker } f = O$ , cioè,  $f$  è iniettiva, e quindi, essendo un endomorfismo, è un isomorfismo di  $\mathbb{R}_3[x]$ . In particolare,  $\text{Im } f = \mathbb{R}_3[x]$ .

c) Gli autovalori di  $f$  sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 - \lambda & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 - \lambda & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Quindi, gli autovalori di  $f$  sono  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$  e  $\lambda_4 = 3$ . Poiché  $f$  ha  $4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$  autovalori tutti distinti tra loro,  $f$  è semplice. Troviamo i relativi autospazi, per poter trovare una base di autovettori.

Poiché  $f(x^3) = -x^3$  e  $\dim V(-1) = 1$ , possiamo già concludere che  $V(-1) = L(x^3)$ .

Gli elementi di  $V(1)$  sono i polinomi  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$  tali che

$$0 = (A - I)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo  $c = d = 2a$ ,  $b = -\frac{9}{2}a$ . Quindi,  $V(1) = L(2 - 9x + 4x^2 + 4x^3)$ .

Gli elementi di  $V(2)$  sono i polinomi  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$  tali che

$$0 = (A - 2I)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo  $a = d = 0$ ,  $b = -c$ . Quindi,  $V(2) = L(x - x^2)$ .

Gli elementi di  $V(3)$  sono i polinomi  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$  tali che

$$0 = (A - I)X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo  $a = d = 0$ ,  $c = -2b$ . Pertanto,  $V(3) = L(x - 2x^2)$ .

In conclusione, una base di autovettori di  $f$  è data da  $B' = \{x^3, 2 - 9x + 4x^2 + 4x^3, x - x^2, x - 2x^2\}$ . La matrice  $P$  di passaggio da  $B$  a  $B'$  è la matrice delle componenti dei vettori di  $B'$  rispetto a  $B$ , cioè,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 3.51.** Sia  $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A = A^t\}$ .

a) Provare che esiste un unico endomorfismo  $f$  di  $\mathcal{S}$  tale che

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, & f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 2-h \end{pmatrix}, \\ f\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove  $h \in \mathbb{R}$ .

b) Trovare, al variare di  $h$  in  $\mathbb{R}$ , gli autospazi di  $f$  e una loro base.

c) Stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$ ,  $f$  è semplice.

SOLUZIONE. a) Come nell'Es. 3.35, per garantire esistenza ed unicità ad  $f$  basta provare che  $\left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$  è una base di  $\mathcal{S}$ . Poiché  $\dim \mathcal{S} = 3$  (vedi Es. 4.1), basta provare che le tre matrici sono linearmente indipendenti. Siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uguagliando i coefficienti otteniamo  $a + 2c = b = a + b - c = 0$ , da cui segue facilmente  $a = b = c = 0$ , per cui,  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  sono linearmente indipendenti. Quindi,  $f$  è univocamente determinato.

b), c) Siano  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Poiché  $A_1 = E_1 + E_3$ ,  $A_2 = E_2 + E_3$  e  $A_3 = 2E_1 - E_3$ , si ha

$$\begin{cases} f(E_1) + f(E_3) = f(A_1) = E_1 - 2E_2 + 3E_3, \\ f(E_2) + f(E_3) = f(A_2) = hE_1 + (2-h)E_3, \\ 2f(E_1) - f(E_3) = f(A_3) = 2E_1 - E_2, \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} f(E_1) = E_1 - E_2 + E_3, \\ f(E_2) = hE_1 + E_2 - hE_3, \\ f(E_3) = -E_2 + 2E_3. \end{cases}$$

Pertanto, la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base  $\{E_1, E_2, E_3\}$  è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -h & 2 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di  $f$  sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & h & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ 1 & -h & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 - \lambda)^2(\lambda - 2),$$

e quindi,  $\lambda_1 = 1$  di molteplicità algebrica 2, e  $\lambda_2 = 2$ , di molteplicità algebrica 1, per ogni  $h \in \mathbb{R}$ . Troviamo i corrispondenti autospazi.

$V(1)$  è costituito dai vettori le cui componenti  $a, b, c \in \mathbb{R}$  rispetto a  $\{E_1, E_2, E_3\}$  soddisfano

$$0 = (A - I) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -h & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hb \\ -a - c \\ a - hb + c \end{pmatrix},$$

cioè,  $(a, b, c)$  deve essere soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} hb = 0, \\ a + c = 0, \\ a - hb + c = 0. \end{cases}$$

Se  $h \neq 0$ , le soluzioni del sistema sono le terne  $(a, b, c)$  tali che  $b = a + c = 0$ , per cui,

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = L \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Poiché la molteplicità algebrica di  $\lambda_1 = 1$  è 2 mentre la molteplicità geometrica è  $\dim V(1) = 1$ , per  $h \neq 0$   $f$  non è semplice.

Se  $h = 0$ , le soluzioni del sistema sono le terne  $(a, b, c)$  tali che  $a + c = 0$ , quindi,

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = L \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

In questo caso, la molteplicità algebrica e geometrica di  $\lambda_1$  sono entrambe uguali a 2. Poiché per  $\lambda_2$  è comunque vero che molteplicità algebrica e geometrica coincidono, essendo la molteplicità algebrica, che è uguale a 1, la maggiore delle due, possiamo già concludere che, per  $h = 0$ ,  $f$  è semplice.

$V(2)$  è costituito dai vettori le cui componenti  $a, b, c \in \mathbb{R}$  rispetto a  $\{E_1, E_2, E_3\}$  soddisfano

$$0 = (A - 2I) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & h & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -h & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + hb \\ -a - b - c \\ a - hb \end{pmatrix},$$

cioè,  $(a, b, c)$  deve essere soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} -a + hb = 0, \\ a + b + c = 0, \\ a - hb = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono le terne  $(a, b, c)$  tali che  $a + hb = a + b + c = 0$ , da cui segue  $a = -hb$ ,  $c = (h - 1)b$ . Pertanto,

$$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} hb & b \\ b & (h-1)b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = L \left( \begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & h-1 \end{pmatrix} \right).$$

Come abbiamo già osservato, la molteplicità geometrica di  $\lambda_2$  è effettivamente sempre uguale a 1.

**Esercizio 3.52.** Sia  $f : \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ ,  $X \mapsto A(X - X^t)A$ , dove  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Trovare  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$ .

b) Dire se  $f$  è semplice.

SOLUZIONE. a) Sia  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un generico elemento di  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Risulta:

$$\begin{aligned} f(X) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2c - 2b & b - c \\ 2c - 2b & c - b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In particolare, se  $B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^{2,2}$ , si ha

$$\begin{aligned} f(E_1) &= f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ f(E_2) &= f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \\ f(E_3) &= f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ f(E_4) &= f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quindi, la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica  $B$  è

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$X \in \text{Ker } f$  se e solo se  $f(X) = O$  cioè, se i suoi coefficienti  $a, b, c, d$  verificano  $2c - 2b = b - c = c - b = 0$ , da cui segue  $b = c$ . Pertanto,

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b = c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{S},$$

cioè,  $\text{Ker } f$  è il sottospazio delle matrici simmetriche. In particolare,  $\dim \text{Ker } f = 3$  e quindi, per il Teorema del rango,  $\dim \text{Im } f = 4 - 3 = 1$ . Risulta:

$$\text{Im } f = L(f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)) = L \left( \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

b) Gli autovalori di  $f$  sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$0 = \det(M_B(f) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda - 3),$$

e quindi,  $\lambda_1 = 0$  di molteplicità algebrica 3, e  $\lambda_2 = 3$ , di molteplicità algebrica 1.

$V(0) = \text{Ker } f$ , e quindi ha dimensione 3. Poiché la molteplicità algebrica di  $\lambda_2 = 3$  è 1, anche la molteplicità geometrica, che è sempre minore o uguale di quella algebrica nonché maggiore o uguale a 1, è 1. Quindi, essendo il polinomio caratteristico interamente decomponibile in  $\mathbb{R}$  e coincidendo molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore, possiamo concludere che  $f$  è semplice.

### 3.4 Esercizi di riepilogo

1. Verificare che:

- $V = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \text{tr}(A) = 0\}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{n,n}$ ;
- $W = \{p \in \mathbb{R}_2[t] \mid p(1) = 0\}$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}_2[t]$ ;
- $V = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det(A) = 0\}$  non è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{n,n}$ .

2. Determinare i valori del parametro  $h \in \mathbb{R}$  per cui i seguenti sottoinsiemi siano sottospazi di  $\mathbb{R}^3$ :

- $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid hx + (h^2 - 1)y + h^2 - 4 = (h - 1)y - z - h + 2 = 0\}$ ;
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid hx - y + h^2 - 1 = (h - 1)y^2 - z = 0\}$ ;
- $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid hx - y + h - 1 = (h - 1)y - z + h = 0\}$ ;
- $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid hx - y^2 + h - 1 = (h - 1)y + 3z = 0\}$ ;

3. Sia  $\mathcal{F}$  lo spazio vettoriale delle funzioni reali di una variabile reale.

(a) Provare che, fissato  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$W = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x_0) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di  $V$ .

(b) Provare che i vettori  $e^x, e^{2x} \in \mathcal{F}$  sono indipendenti.

4. In  $\mathbb{R}_2[t]$ , spazio vettoriale dei polinomi di grado  $\leq 2$ , si considerino i seguenti vettori

$$p_1(t) = 1 - t + 2t^2, \quad p_2(t) = -2 + t^2, \quad p_3(t) = -1 - t + 3t^2, \quad q(t) = 1 + t.$$

(a) Vedere se  $p_1, p_2, p_3$  sono dipendenti.

(b) Scrivere  $W_1 = \mathcal{L}(p_1, p_2, p_3)$  e  $W_2 = \mathcal{L}(q)$ .

(c) Gli spazi  $W_1$  e  $W_2$  sono tra loro supplementari ?

5. Sia  $\mathbb{R}^{3,3}$  lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 3. Si considerino i vettori

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e gli insiemi

$$W_i = \{X \in \mathbb{R}^{3,3} \mid XA_i = A_iX\} \quad i = 1, 2.$$

(a) Verificare che  $W_1 = W_2$ .

(b) Dimostrare che  $W_i$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^{3,3}$  e determinarne una base.

6. Si consideri il sottospazio

$$V = \{(x, x + z - 2t, z, t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

e l'endomorfismo

$$f: V \rightarrow V, \quad f(x, x + z - 2t, z, t) = (hx - (h + 1)t, hx + z + (1 - h)t, z, -t),$$

con  $h \in \mathbb{R}$ . Per quali valori di  $h$  l'endomorfismo  $f$  è semplice?

7. Spazio vettoriale  $V$ , base  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ .

Si consideri l'applicazione lineare  $f: V \rightarrow V$  tale che

$$f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \frac{3}{2}\vec{v}_2, \quad f(\vec{v}_1 - 2\vec{v}_3) = -\frac{1}{2}\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3, \quad f(2\vec{v}_1) = 4\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3.$$

Verificare che  $f$  è invertibile e determinare la matrice associata ad  $f^{-1}$  (inversa di  $f$ ) rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

8. Spazi vettoriali numerici.

Si consideri l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la cui matrice rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare l'immagine, mediante  $f$ , del vettore  $\vec{u} = (1, 0, 3)$  e quella del sottospazio vettoriale

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

(b) Trovare, se esistono, le controimmagini del vettore  $\vec{v} = (0, 3) \in \mathbb{R}^2$ .

9. Spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$ , base canonica  $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ .

Dopo aver verificato che i vettori

$$\vec{u}_1 = (0, 0, 1), \quad \vec{u}_2 = (0, 1, 1), \quad \vec{u}_3 = (1, 1, 1),$$

formano una base di  $\mathbb{R}^3$ , si consideri l'applicazione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineare tale che

$$f(\vec{u}_1) = (2, 3, 5), \quad f(\vec{u}_2) = (-1, 0, 2), \quad f(\vec{u}_3) = (0, 3, 9),$$

(a) Provare che  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{im } f$ .

(b) Si trovi una base  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  tale che  $\vec{e}_1 \in \text{Ker } f$ .

## 10. Spazio vettoriale numerico.

Si consideri l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (-2x + 3y, 2x - 3y).$$

- (a) Provare che  $f$  è diagonalizzabile.
- (b) Determinare l'endomorfismo  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  che fa passare dalla base canonica a quella di autovettori.

## 11. Spazio vettoriale delle matrici.

Sia  $\mathcal{S}$  lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2 ad elementi reali.

- (a) Si provi che esiste un unico endomorfismo  $f$  di  $\mathcal{S}$  tale che (per  $h \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; & f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 2-h \end{pmatrix}; \\ f \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (b) Determinare, per ogni valore di  $h \in \mathbb{R}$ , una base per gli autospazi di  $f$ .
- (c) Stabilire per quali valori di  $h \in \mathbb{R}$  l'endomorfismo  $f$  è diagonalizzabile.
- (d) Posto  $h = 0$ , trovare una base per il sottospazio vettoriale  $f^{-1}(G)$ , dove

$$G = \left\{ Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \mid y_1 + y_2 - y_3 = 2y_2 + y_3 = 0 \right\}.$$

## CAPITOLO 4

# STRUTTURE METRICHE

### 4.1 Prodotti scalari

**Esercizio 4.1.** Dato uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione 2 si considerino due basi  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  e  $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$  tali che

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Sia  $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  la forma bilineare simmetrica definita, rispetto alla base  $\mathcal{B}$ , da

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

1. Trovare  $G = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\beta)$  e  $G' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\beta)$ .
2. Si provi che  $G' = {}^tBGB$ , dove  $B$  è la matrice del cambiamento di base.

SOLUZIONE.

1. La matrice associata a  $\beta$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  è

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Procedendo direttamente si ha

$$\begin{aligned} g'_{11} &= \beta(\vec{e}'_1, \vec{e}'_1) \\ &= \beta(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ &= 4\beta(\vec{e}_1, \vec{e}_1) - 4\beta(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \beta(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \\ &= 4g_{11} - 4g_{12} + g_{22} = 9. \end{aligned}$$

Analogamente  $g'_{12} = 6$  e  $g'_{22} = 15$ , quindi

$$G' = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 4.2.** Si consideri la forma bilineare  $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$g((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xz' + yy' + zx' + 2zz'.$$

1. Provare che  $g$  è un prodotto scalare.
2. Determinare una base ortonormale rispetto a  $g$ .
3. Trovare l'angolo tra i vettori  $\vec{u} = (1, -1, 1)$  e  $\vec{v} = (0, -1, 2)$ .
4. Riconoscere la quadrica  $Q(\vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{v}) = 1$ .

SOLUZIONE.

1. Si vede facilmente che  $g$  è simmetrica e

$$g((x, y, z), (x, y, z)) = x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 = (x + z)^2 + y^2 + z^2 > 0$$

per ogni  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ . Inoltre l'espressione è uguale a zero se e solo se  $x + z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , ossia  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

2. Partiamo dalla base canonica  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  usando il procedimento di Gram-Schmidt. Poniamo  $\vec{v}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_1$ , si ha

$$\|\vec{v}_1\|_g = 1 + 2 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 0 = 1.$$

Inoltre  $g(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$ , quindi poniamo  $\vec{v}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_2$ , notando che

$$\|\vec{v}_2\|_g = 0 + 2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 0 = 1.$$

Infine, posto  $\vec{v}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_3 + \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ , si ha

$$\begin{aligned} 0 &= g(\vec{v}_3, \vec{e}_1) = g(\vec{e}_3, \vec{e}_1) + \lambda &\Rightarrow &\lambda = -g(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = -1, \\ 0 &= g(\vec{v}_3, \vec{e}_2) = g(\vec{e}_3, \vec{e}_2) + \mu &\Rightarrow &\mu = -g(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0, \end{aligned}$$

quindi  $\vec{v}_3 = (-1, 0, 1)$ . Inoltre  $g(\vec{v}_3, \vec{v}_3) = 1$ , quindi una base ortonormale rispetto a  $g$  è data da

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{v}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{v}_3 = (-1, 0, 1).$$

3. Si ha

$$\begin{aligned} g(\vec{u}, \vec{v}) &= 0 + 2 + 1 + 0 + 2 \cdot 2 = 7, \\ g(\vec{u}, \vec{u}) &= 1 + 2 + 1 + 2 = 6, \\ g(\vec{v}, \vec{v}) &= 1 + 8 = 9, \end{aligned}$$

dunque  $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = 7/(3\sqrt{6})$ .

4. Poiché  $g$  è definita positiva, gli autovettori di  $G$  sono positivi e quindi la quadrica è un ellissoide (reale).

**Esercizio 4.3.** *Sia data la forma bilineare simmetrica  $\beta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  rappresentata rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$  da*

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2 + 2x_3y_3,$$

e si consideri la forma quadratica  $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2$  associata a  $\beta$ . Trovare due forme canoniche distinte di  $Q$  e la (unica) forma normale di  $Q$ .

SOLUZIONE. Considerando la matrice associata a  $\beta$  rispetto alla base canonica, la ricerca dei suoi autovalori ed autovettori porta alla base  $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  dove

$$\vec{v}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \vec{v}_2 = (0, 0, 1), \quad \vec{v}_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

e si vede facilmente che

$$\beta(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad \forall i \neq j, \quad \beta(\vec{v}_1, \vec{v}_1) = -1, \quad \beta(\vec{v}_2, \vec{v}_2) = 2, \quad \beta(\vec{v}_3, \vec{v}_3) = 3,$$

quindi rispetto a  $\mathcal{B}'$  la forma canonica è

$$Q(\vec{x}) = -x_1'^2 + 2x_2'^2 + 3x_3'^2.$$

Consideriamo ora la base  $\mathcal{B}'' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ , dove

$$\vec{w}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{w}_2 = (0, 0, 1), \quad \vec{w}_3 = (2, -1, 0).$$

Si ha

$$\beta(\vec{w}_i, \vec{w}_j) = 0 \quad \forall i \neq j, \quad \beta(\vec{w}_1, \vec{w}_1) = 1, \quad \beta(\vec{w}_2, \vec{w}_2) = 2, \quad \beta(\vec{w}_3, \vec{w}_3) = -3.$$

Si noti che questa base si trova usando il secondo vettore della base precedente e cercando due altri vettori 'ortogonali' rispetto a  $\beta$ . Quindi, rispetto a  $\mathcal{B}''$  la forma canonica è

$$Q(\vec{x}) = x_1''^2 + 2x_2''^2 - 3x_3''^2.$$

Si osservi che le due forme canoniche sono diverse ma in entrambi i casi  $s = 2$ ,  $p = 3$ ,  $p - s = 1$ . La segnatura è  $(2, 1)$ , dunque  $Q$  è indefinita. Infatti

$$Q(\vec{v}_1) = -1, \quad Q(\vec{v}_2) = 2.$$

Naturalmente, ponendo

$$X_1 = x_1'', \quad X_2 = \sqrt{2}x_2'', \quad X_3 = \sqrt{3}x_3'',$$

si ha la forma normale

$$Q(\vec{x}) = X_1^2 + X_2^2 - X_3^2.$$

**Esercizio 4.4.** *Si consideri in  $\mathbb{R}^2$  il prodotto scalare*

$$g(\vec{x}, \vec{y}) \stackrel{\text{def}}{=} 4x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

Trovare l'angolo tra i vettori  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  e  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ .

SOLUZIONE. La matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica è

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\cos_g \widehat{\vec{e}_1 \vec{e}_2} = \frac{g(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{\|\vec{e}_1\|_g \|\vec{e}_2\|_g} = \frac{3}{\sqrt{4}\sqrt{5}}.$$

Si noti che l'angolo tra  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  è, ovviamente,  $\pi/2$  rispetto al prodotto scalare standard. Inoltre,  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  hanno lunghezza 1 rispetto al prodotto scalare standard, mentre questo non è vero rispetto a  $g$ .

**Esercizio 4.5.** *Si considerino  $V = \mathbb{R}^{n,n}$  e la forma bilineare  $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:*

$$g((a_{ij}), (b_{ij})) = \sum_{ij} a_{ij}b_{ij}.$$

1. *Provare che  $g$  è un prodotto scalare su  $V$ .*
2. *Per  $n = 2$ , trovare la matrice associata a  $g$  rispetto alla base canonica di  $V$ , e  $U^\perp$ , dove  $U = L(A)$  e  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .*
3. *Determinare una base ortonormale di  $\mathbb{R}^{2,2}$ , formata da vettori di  $U$  e di  $U^\perp$ .*

SOLUZIONE.

1. Si vede facilmente che  $g$  è simmetrica e

$$g((a_{ij}), (a_{ij})) = \sum_{ij} a_{ij}^2 \geq 0$$

per ogni matrice  $(a_{ij})$ . Inoltre, l'espressione è uguale a zero se e solo se  $a_{ij} = 0$  per ogni  $i, j$ , ossia nel caso della matrice nulla.

2. Si verifica facilmente che  $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ , dove  $B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Pertanto,  $M_B(g) = I_4$ , la matrice identità di ordine 4.

Per ogni  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{2,2}$ , risulta:

$$B \in U^\perp \Leftrightarrow g(B, A) = 0 \Leftrightarrow g\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow b_{21} + b_{22} = 0.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{(b_{ij}) \mid b_{21} + b_{22} = 0\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Poiché  $\{A\}$  è una base di  $U$  e una base di  $U^\perp$  è data da  $\{B_1, B_2, B_3\}$ , con  $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , una base ortonormale richiesta si ottiene ortonormalizzando  $\{A, B_1, B_2, B_3\}$ . Osservato che tali matrici sono a 2 a 2 ortogonali, basta normalizzarle. Pertanto, una base ortonormale di vettori di  $U$  e  $U^\perp$  è  $\{A', B'_1, B'_2, B'_3\}$ , dove

$$A' = \frac{A}{\|A\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}A, \quad B'_1 = \frac{B_1}{\|B_1\|} = B_1, \quad B'_2 = \frac{B_2}{\|B_2\|} = B_2, \quad B'_3 = \frac{B_3}{\|B_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}B_3.$$

**Esercizio 4.6.** Sia  $V = \mathbb{R}^{2,2}$  e  $g(A, B) = \sum_{ij} a_{ij}b_{ij}$ . Trovare l'angolo tra i vettori

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE. Poiché  $g(A, B) = 0$ , i due vettori sono ortogonali. Inoltre

$$\|A\|_g = \sqrt{4 + 1 + 1 + 1} = \sqrt{7}, \quad \|B\|_g = \sqrt{0 + 1 + 4 + 1} = \sqrt{6}.$$

**Esercizio 4.7.** Determinare una base ortonormale di  $U^\perp$  dove  $U = \mathcal{L}(\vec{v})$ , essendo  $\vec{v} = (1, 1, 0)$ .

SOLUZIONE.  $U^\perp$  è il piano ortogonale alla retta  $U$  passante per  $O$ :

$$U^\perp = \{(x, y, z) \mid x + y = 0\} = \{(\lambda, -\lambda, \mu)\}.$$

Se  $\vec{w}_1 = (0, 0, 1) \in U^\perp$ , allora  $\vec{w}_2 = (\lambda, -\lambda, \mu) \in U^\perp$  è ortogonale a  $\vec{w}_1$  se  $\mu = 0$  ed ha norma unitaria se  $\lambda^2 + \lambda^2 = 1$ , cioè  $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$ .

**Esercizio 4.8.** *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

associata ad una forma bilineare simmetrica  $\beta$ , dire se  $\beta$  è un prodotto scalare.

SOLUZIONE.  $\beta$  non è un prodotto scalare, poiché è una forma degenera ( $\det A = 0$ ); d'altra parte non è definita positiva poiché i suoi autovalori non sono tutti positivi (c'è  $\lambda = 0$  contato due volte).

**Esercizio 4.9.** *Si consideri la matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Provare che  $G$  definisce un prodotto scalare  $g$  su  $\mathbb{R}^3$ , tale che  $G$  sia la matrice associata a  $g$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .*
2. *Determinare una base ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  rispetto a  $g$ .*
3. *Riconoscere la quadrica  $Q(\vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{v}) = 1$ .*

SOLUZIONE.

1. La matrice  $G$  è simmetrica, quindi

$$g((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xz' + yy' + zx' + 2zz'$$

è una forma bilineare simmetrica. Basta verificare che è definita positiva. Ora

$$\begin{aligned} Q((x, y, z)) &= x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz = (x + z)^2 + y^2 + z^2 \geq 0 \\ Q((x, y, z)) = 0 &\Rightarrow x + z = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

2. Partiamo dalla base canonica  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  di  $\mathbb{R}^3$  ed applicando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt per ottenere una base ortonormale  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ .

$$\begin{aligned} g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1 &\Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{e}_1, \\ g(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0 &\Rightarrow \vec{e}_2 \perp \vec{e}_1, \\ g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1 &\Rightarrow \vec{u}_2 = \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Poniamo  $\vec{v}_3 = \vec{e}_3 - \lambda_1 \vec{u}_1 - \lambda_2 \vec{u}_2$ , con  $\lambda_1 = g(\vec{e}_3, \vec{e}_1)$ ,  $\lambda_2 = g(\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0$ . Risulta  $\vec{v}_3 = \vec{e}_3 - \vec{u}_1 = (-1, 0, 1)$ , e  $g(\vec{v}_3, \vec{v}_3) = 1$ , quindi  $\vec{u}_3 = \vec{v}_3$ .

3. Poiché  $g$  è definita positiva, gli autovettori di  $G$  sono positivi e quindi la quadrica è un ellissoide (reale).

**Esercizio 4.10.** *Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^5$ , munito del prodotto scalare standard, si consideri  $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 + x_5 = x_2 + x_4 = 0\}$ . Trovare  $U^\perp$ , e una base ortonormale di  $\mathbb{R}^5$  costituita da vettori di  $U$  e  $U^\perp$ .*

SOLUZIONE.

$$\begin{aligned} U &= \{(a, b, c, -b, -a+c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \\ &= L(\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0, -1), \vec{u}_2 = (0, 1, 0, -1, 0), \vec{u}_3 = (0, 0, 1, 0, 1)). \end{aligned}$$

Per ogni  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$  risulta:

$$\vec{x} \in U^\perp \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{u}_i = 0, i = 1, 2, 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_5 = x_2 - x_4 = x_3 + x_5 = 0\} \\ &= \{(\alpha, \beta, -\alpha, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = L(\vec{v}_1 = (1, 0, -1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 0, 1, 0)). \end{aligned}$$

Poiché  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  e  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  sono rispettivamente basi di  $U$  e  $U^\perp$ , basta ortonormalizzarle ed unirle per ottenere una base di  $\mathbb{R}^5$  formata da vettori di  $U$  e  $U^\perp$ .

Essendo  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  ortogonali, basta considerare  $\vec{v}'_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 0, 1)$  e  $\vec{v}'_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1, 0)$ .

Consideriamo allora  $\vec{u}'_2 = \vec{u}_2 / \|\vec{u}_2\| = 1/\sqrt{2}(0, 1, 0, -1, 0)$ , e poniamo  $\vec{u}''_1 = \vec{u}_1 - \lambda \vec{u}'_2$ , imponendo che  $\vec{u}''_1 \perp \vec{u}'_2$ , da cui segue  $\lambda = 0$  (poiché  $\vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$ ). Quindi, sia  $\vec{u}'_1 = \vec{u}''_1 / \|\vec{u}''_1\| = 1/\sqrt{2}(1, 0, 0, 0, -1)$ .

Infine, poniamo  $\vec{u}''_3 = \vec{u}_3 - \lambda \vec{u}'_2 + \mu \vec{u}'_3$  imponendo che  $\vec{u}''_3$  sia perpendicolare a  $\vec{u}'_2$  e  $\vec{u}'_1$ . Otteniamo  $\lambda = 0$  e  $\mu = -1/\sqrt{2}$ , per cui,

$$\vec{u}''_3 = \vec{u}_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{u}'_1 = (0, 0, 1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, 0, 0, -1) = (1/2, 0, 1, 0, 1/2),$$

e quindi,  $\vec{u}'_3 = \vec{u}''_3 / \|\vec{u}''_3\| = \sqrt{2/3}((1/2, 0, 1, 0, 1/2))$ . In conclusione, una base di  $\mathbb{R}^5$  formata da vettori di  $U$  e  $U^\perp$  è data da

$$\begin{aligned} \{1/\sqrt{2}(1, 0, 0, 0, -1), 1/\sqrt{2}(0, 1, 0, -1, 0), \sqrt{2/3}((1/2, 0, 1, 0, 1/2)), \\ 1/\sqrt{3}(1, 0, -1, 0, 1), 1/\sqrt{2}(0, 1, 0, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

## 4.2 Trasformazioni ortogonali

**Esercizio 4.11.** *Ridurre a forma canonica la conica*

$$\mathcal{C}: 2xy - 2x + y = 0.$$

**SOLUZIONE.** La forma quadratica  $Q(x, y) = 2xy$  associata a  $\mathcal{C}$  ha autovalori  $\pm 1$ , quindi si tratta di un'iperbole. La seguente base  $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ , con

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2,$$

è una base ortonormale di autovettori e la matrice del cambiamento di base è

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + x_0, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + y_0. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di  $\mathcal{C}$  si ha

$$2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + x_0 \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + y_0 \right) - 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + x_0 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + y_0 = 0.$$

Eseguendo i calcoli e imponendo che i termini lineari siano nulli si ha

$$\begin{cases} 2y_0 + 2x_0 - 1 = 0, \\ -2y_0 + 2x_0 + 3 = 0, \end{cases}$$

da cui  $x_0 = -1/2$ ,  $y_0 = 1$ , quindi

$$\mathcal{C}: x'^2 - y'^2 + 1 = 0.$$

Il centro di  $\mathcal{C}$  nelle coordinate  $x'y'$  è  $(0, 0)$ , quindi  $(x_0, y_0) = (-1/2, 1)$  nelle coordinate  $xy$ .

**Esercizio 4.12.** *Ridurre a forma canonica la quadrica*

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz + 2x + z + 3 = 0.$$

**SOLUZIONE.** Verrà usato un metodo diverso dal metodo usato nel precedente esercizio. Il metodo si sviluppa in due passi.

*I passo.* La ricerca degli autovalori della matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

della parte quadratica della quadrica dà  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 4$ . Gli autovettori corrispondenti (normalizzati, in modo da ottenere una base ortonormale) sono

$$\vec{v}_1 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad \vec{v}_2 = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \quad \vec{v}_3 = (2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6});$$

si ponga  $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ . La matrice del cambiamento di base

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

trasforma componenti rispetto alla base  $\mathcal{B}$  in componenti rispetto alla base canonica  $\mathcal{C}$ , ossia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

La trasformazione inversa si ottiene mediante  ${}^tP$  poiché  $P$  è ortogonale:  $X' = {}^tPX$ . Si ha

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = {}^tPQP,$$

dunque nelle nuove coordinate si ha

$$\begin{aligned} f(x', y', z') &= -2x'^2 + y'^2 + 4z'^2 + 2 \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z' \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \right) + 3 \\ &= -2x'^2 + y'^2 + 4z'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{5}{\sqrt{6}}z' + 3 = 0. \end{aligned}$$

*II passo.* Qui si vogliono eliminare i termini di primo grado corrispondenti a variabili dove il termine di secondo grado abbia coefficiente non nullo. A tale scopo, i termini di primo grado vengono accorpati ai termini di secondo grado aggiungendo e togliendo un'opportuna costante in modo da ottenere un quadrato perfetto. Si ha

$$\begin{aligned} f(x', y', z') &= -2 \left( x'^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}x' + \frac{1}{32} \right) + \frac{2}{32} + \left( y'^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{12} \right) - \frac{1}{12} + \\ &\quad + 4 \left( z'^2 + \frac{5}{4\sqrt{6}}z' + \frac{25}{96} \right) - 4\frac{25}{96} + 3 \\ &= -2 \left( x' - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right)^2 + \left( y' - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \left( z' + \frac{5}{8\sqrt{6}} \right)^2 + \frac{93}{48} = 0. \end{aligned}$$

Effettuando la traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ y'' = y' - \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ z'' = z' + \frac{5}{8\sqrt{6}} \end{cases}$$

si ottiene  $f(x'', y'', z'') = -2x''^2 + y''^2 + 4z''^2 + 93/48 = 0$ , che è l'equazione di un iperboloide a due falde.

**Esercizio 4.13.** Ripetere l'esercizio 4.11 usando il metodo del precedente esercizio.

**Esercizio 4.14.** Si consideri l'endomorfismo  $f$  dell'esercizio 3.18. Dimostrare che  $f$  è un'isometria, trovare i suoi punti fissi e dire cosa rappresenta  $f$  geometricamente.

SOLUZIONE.  $f$  è un'isometria perché  $f$  è una trasformazione ortogonale, essendo  ${}^tA = A^{-1}$ . Il luogo dei punti fissi di  $f$  è costituito dalle soluzioni del sistema

$$AX = X \quad \Rightarrow \quad (A - \text{Id})X = O \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x - \sqrt{3}z = 0, \\ -\sqrt{3}x - z = 0, \end{cases}$$

dunque  $U = \{(0, k, 0)\}$ . Quindi  $f$  rappresenta una rotazione intorno all'asse  $y$ .

**Esercizio 4.15.** Considerando l'esercizio 3.22,

1. determinare  $(\text{Ker } f_k)^\perp$ ;
2. dire se esistono valori di  $k$  per cui  $f_k$  è una trasformazione ortogonale.

SOLUZIONE.

1. Si ha

$$\begin{aligned} \text{Ker } f_k &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0, kx + y = 0, -y = 0 \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid kx = 0, y = 0, z = 0 \}. \end{aligned}$$

Se  $k \neq 0$ , allora  $\text{Ker } f_k = \{\vec{0}\}$  e  $(\text{Ker } f_k)^\perp = \mathbb{R}^3$ .

Se  $k = 0$ , allora  $\text{Ker } f_0 = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$  e  $(\text{Ker } f_0)^\perp = \{(0, m, n) \mid m, n \in \mathbb{R}\}$ .

2. La funzione  $f_k$  è una trasformazione ortogonale se e solo se

$$A_k \cdot {}^tA_k = {}^tA_k \cdot A_k = I,$$

ma  $A_k \cdot {}^tA_k \neq I$  per ogni  $k \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 4.16.** Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^3$ , munito del prodotto scalare standard, si consideri l'endomorfismo  $f$  tale che

$$M_B(f) = A = \begin{pmatrix} h-1 & h & 0 \\ h & 0 & 1-h \\ h-1 & 0 & h \end{pmatrix},$$

dove  $B$  rappresenta la base canonica, e  $h \in \mathbb{R}$ . Dire per quali valori di  $h$ ,  $f$  è una trasformazione ortogonale. Per tali valori di  $h$ , interpretare geometricamente  $f$ .

SOLUZIONE. Si verifica facilmente che

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2(h-1)^2 + h^2 & h(h-1) & 0 \\ h(h-1) & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-h)^2 + h^2 \end{pmatrix}.$$

$f$  è una trasformazione ortogonale se e solo se  $A$  è una matrice ortogonale, ossia se  $A^T \cdot A = I$ , quindi se e solo se  $h^2 = 1$  e  $h(h-1) = 0$ , che sono contemporaneamente soddisfatte solo per  $h = 1$ . Interpretiamo ora  $f$  quando  $h = 1$ , studiando il sottospazio  $V$  dei punti fissi di  $f$ . Poichè  $h = 1$ , risulta

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I punti fissi di  $f$  corrispondono alle soluzioni del sistema lineare  $(A - I)X = 0$ , ossia,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si calcola facilmente che

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\} = \{(a, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = L((1, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Quindi,  $\dim V = 2$ . Essendo  $\det A = -1$ ,  $f$  è la simmetria ortogonale rispetto al piano  $V$ .

**Esercizio 4.17.** *Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^3$ , munito del prodotto scalare standard, si consideri l'endomorfismo  $f$  tale che*

$$M_B(f) = A = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 22 \\ 14 & -18 & 3 \\ 18 & 13 & -6 \end{pmatrix},$$

dove  $B$  rappresenta la base canonica. Interpretare geometricamente  $f$ .

SOLUZIONE. Si verifica facilmente che  $A \cdot A^T = I$ . Quindi,  $A$  è una matrice ortogonale. Essendo  $A$  associata ad  $f$  rispetto a una base ortonormale, ne segue che  $f$  è una trasformazione ortogonale. Interpretiamo  $f$  studiando  $\text{rg}(A - I)$ , da cui ricaviamo la dimensione del sottospazio  $V$  dei punti fissi di  $f$  (dal Teorema di Rouché-Capelli, in quanto  $A - I$  è la matrice associata al sistema lineare che dá i punti fissi di  $f$ ). Poichè

$$A - I = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} -20 & 6 & 22 \\ 14 & -41 & 3 \\ 18 & 13 & -29 \end{pmatrix},$$

si verifica facilmente che  $\det(A - I) = 0$ , e quindi,  $\text{rg}(A - I) < 3$ . Poichè

$$\begin{vmatrix} -41 & 3 \\ 13 & -29 \end{vmatrix} \neq 0,$$

concludiamo che  $\text{rg}(A - I) = 2$ , e quindi,  $\dim V = 3 - 2 = 1$ . Di conseguenza,  $f$  è la rotazione intorno alla retta vettoriale  $V$ .

**Esercizio 4.18.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

e sia  $f_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $f_A(X) = AX$  rispetto alla base canonica.

1. *Provare che  $f$  è una trasformazione ortogonale.*
2. *Trovare  $f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ .*
3. *Trovare i punti fissi di  $f$  e dire che cosa rappresenta  $f$  geometricamente.*
4. *Trovare gli autovalori di  $A^h$  per ogni  $h \in \mathbb{N}$  e vedere se  $A^h$  è diagonalizzabile.*

SOLUZIONE.

1. Si verifica facilmente che  $A^t A = \text{Id} = {}^t A A$ . Inoltre  $\det A = -1$ .
2.  $f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) = (1/2, 1, \sqrt{3}/2)$ .
3. Basta risolvere il sistema omogeneo  $A - \text{Id} X = O$ , che dà come soluzione il piano  $x = \sqrt{3}z$ . Ne segue che  $f$  è il ribaltamento (simmetria ortogonale) rispetto a questo piano.
4. Poiché  $A = {}^t A = A^{-1}$  risulta  $A^2 = \text{Id}$  e  $A^h = \text{Id}$  per  $h$  pari e  $A^h = A$  per  $h$  dispari. Se  $h$  è pari  $A^h$  ha l'autovalore  $\lambda = 1$  con molteplicità 3; se  $h$  è dispari  $A^h$  ha l'autovalore  $\lambda_1 = 1$  con molteplicità 2 e  $\lambda_2 = -1$  con molteplicità 1. Essendo  $A$  simmetrica, anche  $A^h$  è simmetrica e quindi diagonalizzabile.

**Esercizio 4.19.** *Facendo riferimento all'esercizio 3.37, posto  $h = \frac{3}{4}$ , trovare per quali valori di  $a$  l'applicazione  $f$  è un'isometria, e nel caso  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , trovare i punti fissi di  $f$  e riconoscere come opera geometricamente l'applicazione  $f$ .*

SOLUZIONE. La matrice associata ad  $f$  (per  $h = 3/4$ ) è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & 0 \\ \frac{3}{4a} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora  $A^tA = I$  implica  $1/4 + a^2 = 1$ ,  $a^2 = 3/4$ , che implica  $a = \pm\sqrt{3}/2$ . Dunque  $f$  è un'isometria per  $a = \pm\sqrt{3}/2$ .

Troviamo ora i punti fissi di  $f$ . Essendo

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad y = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}y, \quad z = z,$$

il luogo dei punti fissi è il piano  $x = \sqrt{3}y$ . Si tratta, allora, della simmetria ortogonale rispetto al piano  $x = \sqrt{3}y$ .

### 4.3 Esercizi di riepilogo

1. Sia  $E$  uno spazio vettoriale euclideo arbitrario.

(a) Verificare che

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2,$$

(b) Provare che

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

(c) Provare che

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v}).$$

(d) Interpretare i risultati precedenti nello spazio dei vettori ordinari.

2. Sia  $E = \mathbb{R}^2$  con la struttura euclidea standard. Verificare che i seguenti vettori costituiscono un quadrato:

$$\vec{v}_1 = (9, 1), \quad \vec{v}_2 = (4, 13), \quad \vec{v}_3 = (-8, -8), \quad \vec{v}_4 = (-3, -4).$$

3. Si consideri la forma bilineare  $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  associata (rispetto alla base canonica) alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Vedere per quali valori di  $a$  la matrice  $A$  è diagonalizzabile.

(b) Studiare, al variare di  $a \in \mathbb{R}$ , la segnatura di  $\beta$ .

(c) Dopo aver provato che per  $a = 2$  la forma  $\beta$  definisce un prodotto scalare, trovare una base ortonormale rispetto a  $\beta$ .

4. Sia  $E$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  riferito alla base  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ .

(a) Provare che i seguenti vettori costituiscono una base  $\tilde{\mathcal{B}}$ :

$$\vec{u}_1 = (1, 1, -1), \quad \vec{u}_2 = (1, -1, 0), \quad \vec{u}_3 = (-1, 0, 1).$$

(b) Si dimostri che  $(E, g)$  è uno spazio vettoriale euclideo, dove

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

(c) Dedurre dalla base  $\tilde{\mathcal{B}}$  una base ortonormale rispetto a  $g$ .

(d) Descrivere  $U^\perp$ , dove  $U = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ .

(e) Trovare la proiezione ortogonale di  $\vec{x} = (0, 1, 1)$  su  $U$ .

5. Sia  $V = \mathbb{R}_n[t]$  lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale ad  $n$ . Per  $p, q \in V$  si consideri l'applicazione

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(p, q) = \int_{-1}^{+1} p(t)q(t) dt.$$

(a) Provare che  $g$  è un prodotto scalare.

(b) Nel caso  $n = 2$  trovare la matrice associata a  $g$  rispetto alla base canonica di  $V$ .

(c) Determinare una base ortonormale di  $V$ .

6. Si consideri l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$ , individuato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ridurre a forma canonica la forma quadratica associata ad  $f$ .