Università del Salento
Facoltà di Ingegneria
Corsi di Laurea in Ingegneria Industriale e Civile
Prova scritta di Meccanica Razionale
20 giugno 2016
Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Siano A e B due punti di un atto di moto rigido piano. Dire quale delle seguenti affermazioni è errata:
   - ■ Le componenti ortogonali ad $\vec{AB}$ di $\vec{v}(A)$ e $\vec{v}(B)$ sono sempre uguali.
   - ☐ $\vec{v}(A) - \vec{v}(B) = \omega \wedge \vec{BA}$
   - ☐ Le componenti lungo la congiungente $\vec{AB}$ di $\vec{v}(A)$ e $\vec{v}(B)$ sono sempre uguali.
   - ☐ Le componenti ortogonali ad $\vec{AB}$ di $\vec{v}(A)$ e $\vec{v}(B)$ sono arbitrarie.
   - ☐ $\vec{v}(A)$ e $\vec{v}(B)$ possono esse uguali.
2. Sia I_O il tensore d'inerzia di un sistema materiale. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta:
   - ■ Il suo determinante può essere nullo.
   - ☐ I_O può ammettere autovalori immaginari puri.
   - ☐ I_O può ammettere un autovalore negativo.
   - ☐ I_O ammettere tre autovalori nulli.
   - ☐ La sua traccia può essere nulla.
3. Quale tra le seguenti affermazioni sulle equazioni di Eulero per il corpo rigido è falsa?
   - ■ Si possono sempre derivare da una lagrangiana.
   - ☐ Discendono dalla seconda equazione cardinale della dinamica.
   - ☐ Possono essere espresse in termini degli angoli di Eulero.
   - ☐ Possono essere scritte in forma normale.
   - ☐ Dipendono dalla velocità angolare del corpo rigido.
4. Un sistema è costituito da due punti A e B collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza di riposo zero. Dire quel delle seguenti affermazioni è corretta.
   - ■ Il potenziale della forza elastica è $-k/2\|\vec{AB}\|^2$.
   - ☐ Il sistema non ammette quantità conservate.
   - ☐ Il sistema non ammette una lagrangiana.
   - ☐ L'energia cinetica è una quantità conservata del sistema.
   - ☐ La forza tra i due punti può essere repulsiva.
5. Se una forza è conservativa, allora:
   - ■ La forza è posizionale.
   - ☐ La forza dipende dal tempo.
   - ☐ La forza generalizzata è costante.
   - ☐ La forza dipende linearmente dalla velocità.
   - ☐ La forza è sempre nulla.
6. Sia dato un sistema meccanico piano costituito da due aste collegate tra di loro con una cerniera mobile che è a sua volta collegata al centro di un disco. Quanti gradi di libertà ha il sistema?
   - ■ 5
   - ☐ 1
   - ☐ 2

- ☐ 3
- ☐ 4

7. Un sistema meccanico con vincoli olonomi ha n gradi di libertà; ciò implica che:
   - ■ Il sistema ha n velocità corrispondenti alle coordinate lagrangiane.
   - ☐ Il sistema ha n particelle.
   - ☐ Sul sistema agisce un sistema di n forze.
   - ☐ Il sistema ha n vincoli.
   - ☐ La quantità di moto totale del sistema è un vettore con 3 componenti.
8. Se un sistema di forze è conservativo, cosa si può dire sulla forza generalizzata?
   - ■ La forza generalizzata è il gradiente del potenziale.
   - ☐ La forza generalizzata si riduce ad un unica funzione scalare.
   - ☐ La forza generalizzata è costante.
   - ☐ La forza generalizzata dipende linearmente dalla velocità.
   - ☐ La forza generalizzata è sempre nulla.
9. Quale tra le seguenti affermazioni sulla velocità angolare di un corpo rigido è falsa?
   - ■ La velocità angolare dipende dalla terna solidale al corpo rigido scelta per calcolarla.
   - ☐ Le formule di Poisson permettono di calcolare la velocità angolare del corpo rigido.
   - ☐ La velocità angolare permette di calcolare la velocità di ogni punto del corpo rigido, note posizione e velocità di uno dei suoi punti.
   - ☐ La velocità angolare permette di calcolare l'accelerazione di ogni punto del corpo rigido, nota la posizione in funzione del tempo di uno dei suoi punti.
   - ☐ La velocità angolare permette di calcolare l'energia cinetica di un corpo rigido con baricentro fisso, noto il suo tensore d'inerzia baricentrale.
10. Quando si può dire che un asse a è principale d'inerzia per un corpo rigido?
    - ■ Quando la sua direzione è un autovettore del tensore d'inerzia.
    - ☐ Quando $I_a < 0$.
    - ☐ Quando almeno un prodotto di inerzia rispetto ad un punto contenuto in a è nullo.
    - ☐ Quando il corpo rigido ammette almeno una simmetria materiale.
    - ☐ Solo i giroscopi ammettono assi principali di inerzia.
11. In quale circostanza si conserva la quantità di moto totale di un corpo rigido?
    - ■ Quando il risultante delle forze esterne è nullo.
    - ☐ Quando il risultante dei momenti delle forze esterne è nullo.
    - ☐ Quando le forze esterne sono conservative.
    - ☐ Quando le forze interne sono conservative.
    - ☐ In presenza della sola forza peso.
12. Quale tra le seguenti affermazioni sui vincoli ideali è vera?
    - ■ Il lavoro delle reazioni vincolari non è mai negativo.
    - ☐ Un corpo rigido con un punto fisso non è un sistema meccanico con vincoli ideali.
    - ☐ Il principio dei lavori virtuali non è formulato per vincoli ideali.
    - ☐ L'ipotesi di vincolo ideale non è necessaria alla formulazione delle equazioni di Eulero–Lagrange.
    - ☐ Gli spostamenti virtuali in un punto di un vincolo ideale sono solo bilateri.
13. Quale tra le seguenti è una affermazione corretta sul Centro di Istantanea Rotazione (CIR)?
    - ■ Il moto di un corpo rigido piano ha un CIR se la velocità angolare non è nulla.

☐ Il moto di ogni corpo rigido ammette un CIR.

☐ Il moto di un corpo rigido piano ha un CIR.

☐ Il moto di ogni particella ammette un CIR.

☐ Il CIR si trova nell'intersezione di due rette contenenti due velocità di due particelle.

Parte 2: Esercizio

1. Il sistema di figura, sito nel piano verticale con l'asse $\mathbf{j}$ orientato come la verticale ascendente, è composto:

   - dall'asta omogenea AB, di lunghezza $2l$ e massa m, che ha l'estremo A vincolato a scorrere verticalmente;
   - dall'asta omogenea BC, di lunghezza l, incernierata in B all'asta AB, che può traslare orizzontalmente con l'ausilio di un pattino posto in C.

   Una molla ideale, di costante elastica $k = mg/(2l)$, collega il punto medio E dell'asta BC con il punto fisso D, posto sulla verticale di A alla stessa quota di E . Si considerino tutti i vincoli ideali e si scelga come coordinata libera l'angolo orario α che l'orizzontale forma con l'asta AB.

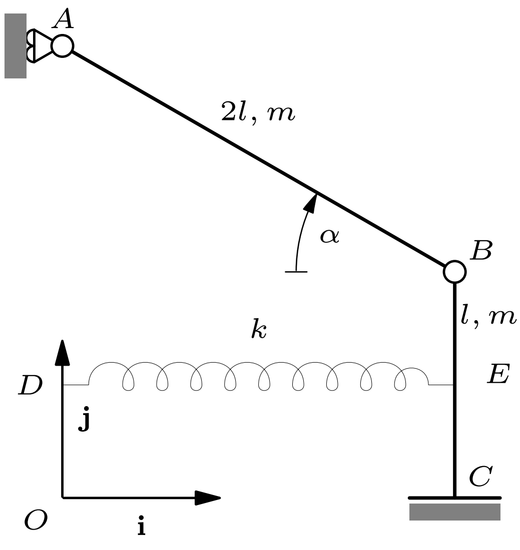
   (a) Determinare le configurazioni di equilibrio per $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.

   (b) Determinare le reazioni vincolari esterne in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio del punto precendente.

   (c) Scrivere l'energia cinetica del sistema in funzione della coordinata libera.

   (d) Determinare la coppia oraria che, applicata all'asta AB, garantisce la legge oraria del punto A, $y_A(t) = l + 2l\sin(\omega_0 t)$, con ω_0 costante.

   (e) Nelle ipotesi del punto precedente, determinare le reazioni vincolari esterne ed interne al variare del tempo.



Soluzione.

(a) Usando il teorema di stazionarietà del potenziale si ha:

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{1}{2}k\|\vec{DE}\|^2 - mg\ell\sin\alpha + \text{cost} \\
&= -2k\ell^2\cos^2\alpha - mg\ell\sin\alpha + \text{cost}, \\
\frac{\partial U}{\partial \alpha} &= 4k\ell^2\sin\alpha\cos\alpha - mg\ell\cos\alpha
\end{aligned}
$$

dunque $\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0$ se e solo se $\cos\alpha = 0$ o $4k\ell^2 \sin\alpha - mg\ell = 0$. Sostituendo $k = mg/(2\ell)$ si hanno le configurazioni di equilibrio

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{6}$$

1. Si possono scrivere le equazioni cardinali della statica. La prima equazione, scritta per tutto il sistema, è

$$\begin{aligned} H_A - kx_E &= 0, \\ V_C - 2mg &= 0. \end{aligned}$$

La seconda equazione può essere scritta per la sola asta BC usando come polo il punto B. Risulta:

$$\vec{M}_B^{(e)} = \gamma_C - k2\ell\cos\alpha\frac{\ell}{2} = 0.$$

Si hanno i seguenti valori:

(a) in α_1: $H_A = 0$, $V_C = 2mg$, $\gamma_C = 0$;

(b) in α_2: $H_A = 0$, $V_C = 2mg$, $\gamma_C = 0$;

(c) in α_3: $H_A = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$, $\gamma_C = \frac{\sqrt{3}}{4}mg\ell$.

2. Si noti che

$$\begin{aligned} \vec{OG}_{AB} =& \ell\cos\alpha\mathbf{i} + (\ell + \ell\sin\alpha)\mathbf{j} \\ \vec{v}_{G_{AB}} =& -\ell\dot\alpha\sin\alpha\mathbf{i} + \ell\dot\alpha\cos\alpha\mathbf{j} \\ \vec{v}^2_{G_{AB}} =& \ell^2\dot\alpha^2 \end{aligned}$$

L'energia cinetica è $T = T_{AB} + T_{BC}$, e si ha

$$\begin{aligned} T_{AB} =& \frac{1}{2}m\|\vec{v}_{G_{AB}}\|^2 + \frac{1}{2}I_{G_{AB}}\dot\alpha^2 \\ =& \frac{1}{2}m\ell^2\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m4\ell^2\dot\alpha^2 \\ =& \frac{2}{3}m\ell^2\dot\alpha^2 \\ T_{BC} =& \frac{1}{2}m\|\vec{v}_E\|^2 = 2m\ell^2\dot\alpha^2\sin^2\alpha \end{aligned}$$

Si ricorda, ancora una volta, che non ha nessun senso tentare di calcolare "l'energia cinetica della molla".

3. Dal moto assegnato risulta $\alpha(t) = \omega_0 t$. Calcolando l'equazione del moto col teorema dell'energia cinetica si ottiene

$$\begin{aligned} \dot T =& \frac{4}{3}m\ell^2\dot\alpha\ddot\alpha + 2m\ell^2(2\dot\alpha\ddot\alpha\sin^2\alpha + \dot\alpha^3 2\sin\alpha\cos\alpha) \\ \Pi =& \dot\alpha(2k\ell^2\sin(2\alpha) - mg\ell\cos\alpha + \gamma) \\ \dot T - \Pi =& 2m\ell^2\omega_0^2\sin(2\omega_0 t) - 2k\ell^2\sin(2\omega_0 t) + mg\ell\cos(\omega_0 t) - \gamma(t) = 0 \end{aligned}$$

da cui si può ricavare $\gamma(t)$.

4. Calcolando la prima equazione cardinale della dinamica si ha

$$\begin{aligned} \vec{Q} =& \vec{Q}_{AB} + \vec{Q}_{BC}, \\ \vec{Q}_{AB} =& m(-\ell\dot\alpha\sin\alpha\mathbf{i} + \ell\dot\alpha\cos\alpha\mathbf{j}) \\ \vec{Q}_{BC} =& m(-2\ell\dot\alpha\sin\alpha\mathbf{i}) \\ \vec{R}^{(e)} =& \left(H_A - \frac{mg}{2\ell}2\ell\cos\alpha\right)\mathbf{i} + (V_C - 2mg)\mathbf{j} \end{aligned}$$

Per $\alpha(t) = \omega_0 t$ si ha

$$\vec{Q} = m\ell\omega_0^2(-\cos(\omega_0 t)\mathbf{i} - \sin(\omega_0 t)\mathbf{j}) - 2m\ell\omega_0^2\cos(\omega_0 t)\mathbf{i}$$

da cui, sostituendo nella prima equazione cardinale della dinamica, si ottiene

$$
\begin{aligned}
H_A =& mg\cos(\omega_0 t) - 3m\ell\omega_0^2\cos(\omega_0 t),\\
V_A =& 2mg - m\ell\omega_0^2\sin(\omega_0 t).
\end{aligned}
$$

Calcolando la seconda equazione cardinale della dinamica per il sottosistema costituito dalla sola asta BC si ha

$$
\begin{aligned}
\vec{K}_B =& \vec{BE}\wedge m\vec{v}_E = -m\ell^2\dot{\alpha}\sin\alpha\mathbf{k}\\
\dot{\vec{K}}_B =& -m\ell^2\omega_0^2\cos(\omega_0 t)\mathbf{k}\\
-m\ell^2\omega_0^2\cos(\omega_0 t) =& \gamma_C - k2\ell\cos(\omega_0 t)\frac{\ell}{2}
\end{aligned}
$$

da cui si ricava $\gamma_C(t)$. Calcolando la prima equazione cardinale della dinamica per il sottosistema costituito dalla sola asta BC si ha

$$
\begin{aligned}
H_B - k2\ell\cos(\omega_0 t) =& -2m\ell\omega_0^2\cos(\omega_0 t)\\
V_B + V_C - mg =& 0
\end{aligned}
$$

da cui si ricavano H_B e V_B.