Università del Salento
Facoltà di Ingegneria
Corsi di Laurea in Ingegneria Industriale e Civile
Prova scritta di Meccanica Razionale
09 luglio 2016
Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Sia dato un disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
   - ■ Il vincolo di puro rotolamento non è un vincolo liscio.
   - □ La reazione vincolare nel punto di contatto è ortogonale alla guida.
   - □ La velocità istantanea del punto di contatto è uguale alla velocità istantanea del centro del disco.
   - □ Le componenti parallele alla guida delle velocità del centro del disco e del punto di contatto sono uguali.
   - □ Nessuna delle altre affermazioni è vera.
2. Sia I_O il tensore d'inerzia di un sistema materiale con massa non nulla. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta:
   - ■ Il tensore I_O è una matrice simmetrica semidefinita positiva.
   - □ Il tensore I_O può avere determinante negativo.
   - □ Il tensore I_O può essere nullo.
   - □ Il tensore I_O è una matrice invertibile.
   - □ Il tensore I_O ha traccia negativa.
3. Siano $\vec{R}$ e $\vec{M}_O$ i vettori caratteristici di un sistema di forze. Quale tra le seguenti affermazioni è errata?
   - ■ Per ogni valore di $\vec{R}$ e $\vec{M}_O$ si può definire l'asse centrale del sistema.
   - □ Se le forze del sistema sono concorrenti esiste un punto Q rispetto al quale $\vec{M}_Q = \vec{0}$.
   - □ Se $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$ allora $\vec{M}_P = \vec{0}$ per qualsiasi altro polo P.
   - □ Se $\vec{R} = \vec{0}$ allora $\vec{M}_P = \vec{M}_O$ per qualsiasi altro polo P.
   - □ $\vec{M}_O$ dipende dalla scelta del polo O.
4. Siano $(A, v(A))$ e $(B, v(B))$ gli atti di moto nei punti A e B di un atto di moto rigido piano, con velocità angolare istantanea ω. Dire quale delle seguenti formule è sbagliata.
   - ■ $v(A) - v(B) = AB \wedge \omega$
   - □ $v(B) - v(A) = -BA \wedge \omega$
   - □ $(v(A) - v(B)) \cdot \vec{AB} = 0$
   - □ $\omega \cdot (v(A) - v(B)) = 0$
   - □ $\omega = (v(A) - v(B))/|\vec{AB}|^2 + \lambda \vec{AB}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$
5. La legge di Coulomb–Morin dà un legame tra componenti di una grandezza fisica. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?
   - ■ L'attrito statico dipende dalla componente normale della reazione vincolare.
   - □ L'attrito statico è presente in tutti i vincoli lisci.
   - □ L'attrito statico è presente solo sul piano inclinato.
   - □ L'attrito statico dipende dalla velocità del corpo.
   - □ L'attrito statico non dipende dalle qualità del vincolo.
6. Dato un sistema conservativo, con un grado di libertà, soggetti a vincoli ideali bilateri e fissi descritto dalla variabile libera q. Dire quale delle seguenti affermazioni non è corretta:

- ■ i massimi del potenziale sono punti di equilibrio stabile;
- □ la matrice di massa può essere una funzione di q;
- □ l'energia cinetica è una funzione quadratica di q;
- □ l'energia cinetica dipende da $\dot{q}$
- □ Il teorema dell'energia cinetica fornisce l'equazione pura del moto.

7. Dato un sistema meccanico conservativo con vincoli olonomi fissi, si dica quale tra le seguenti condizioni assicura la stabilità secondo Lyapunov.
   - ■ Il potenziale ammette un massimo relativo isolato.
   - □ L'energia potenziale ammette un massimo relativo isolato.
   - □ Il potenziale ha un punto con gradiente nullo.
   - □ L'hessiano del potenziale è semidefinito positivo.
   - □ L'hessiano del potenziale è semidefinito negativo.

8. Sia dato un sistema meccanico piano costituito da una sfera che rotola e striscia su un piano. Quanti gradi di libertà ha il sistema?
   - ■ 4
   - □ 3
   - □ 1
   - □ 2
   - □ 5

9. Un sistema meccanico con vincoli olonomi ha n gradi di libertà; ciò implica che:
   - ■ Il sistema ha n accelerazioni corrispondenti alle coordinate lagrangiane.
   - □ Il sistema ha n particelle.
   - □ Sul sistema agisce un sistema di n forze.
   - □ Sul sistema agiscono n momenti di n forze.
   - □ La quantità di moto totale del sistema è una grandezza scalare.

10. Che cosa è la matrice di massa di un sistema olonomo?
    - ■ È la matrice dei coefficienti dei termini di secondo grado nelle velocità nell'energia cinetica.
    - □ È la matrice delle masse dei punti che compongono il sistema.
    - □ È la matrice delle velocità dei punti del sistema.
    - □ È la matrice delle energie cinetiche di ciascun punto del sistema.
    - □ È la matrice dei potenziali applicati a ciascun punto del sistema.

Parte 2: Esercizio

1. Il sistema materiale di figura, sito nel piano verticale con l'asse $\mathbf{i}$ orientato come la verticale discendente, è composto:
   - dal disco rigido omogeneo di centro C, raggio R e massa M, che ha il punto O della sua circonferenza incernerato;
   - dal punto P, di massa m, saldato sulla circonferenza in maniera tale che l'angolo orario $O\hat{C}P$ sia retto.

   Una molla ideale, di costante elastica k, collega il punto C con il punto D dell'asse $\mathbf{j}$, posto sulla stessa verticale di C. Si considerino tutti i vincoli ideali e si scelga come coordinata libera l'angolo antiorario θ che la verticale forma con la direzione OC.

   (a) Determinare gli assi e i momenti principali del sistema relativi al punto C.

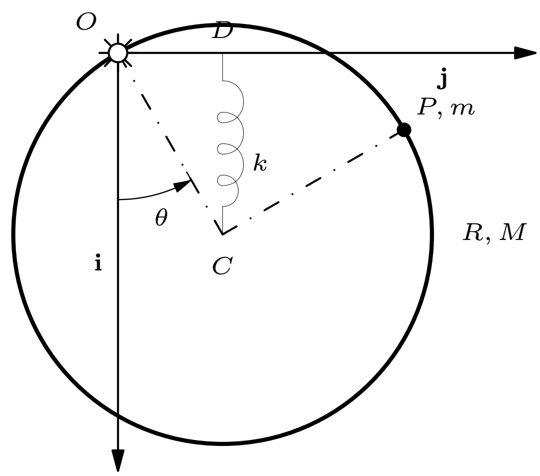
   (b) Determinare il valore di k affinché il sistema sia in equilibrio con $P \equiv (R(\sqrt{3}-1)/2, R(\sqrt{3}+1)/2)$.

(c) Determinare il limite inferiore del rapporto M/m al di sopra del quale la posizione di equilibrio del punto precedente è stabile.

(d) Scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica rispetto al polo O.

(e) Mostrare che il teorema dell'energia cinetica fornisce un'equazione del moto identica a quella del punto precedente.

(f) In assenza della molla, determinare l'accelerazione angolare istantanea quando $P \equiv (R(\sqrt{3}-1)/2, R(\sqrt{3}+1)/2)$.



Soluzione.

(a) Per ragioni di simmetria gli assi principali rispetto al punto C sono:

i. la retta individuata da CP ($\vec{e}_1$);

ii. la retta del piano (passante per C) ortogonale a CP ($\vec{e}_2$);

iii. la retta ortogonale al piano passante per C ($\vec{e}_3$).

I momenti principali d'inerzia sono

$$I_1 = \frac{1}{4}MR^2, \quad I_2 = \frac{1}{4}MR^2 + mR^2, \quad I_3 = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2.$$

(b) Il potenziale è:

$$U = -\frac{k}{2}R^2\cos^2\theta + MgR\cos\theta + mgR(\cos\theta - \sin\theta)$$

Il punto P individua l'angolo $\theta = \pi/6$. Si ha

$$U'(\frac{\pi}{6}) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2(m + \sqrt{3}m + M)}{\sqrt{3}R}.$$

(c) La condizione $U''(\pi/6) < 0$, con il valore di k trovato nel punto precedente, è soddisfatta se

$$U''(\frac{pi}{6}) = -\frac{1}{6}((-9+\sqrt{3})m + \sqrt{3}M)gR < 0$$

dunque

$$\frac{M}{m} > \frac{9-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

(d) $\dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O^{(e)}$ dove $\vec{K}_O = I_{O_z}\dot{\theta}\mathbf{k}$ e $I_{O_z} = \frac{3}{2}MR^2 + 2mR^2$. Si ha anche

$$\vec{M}_O^{(e)} = -MgR\sin\theta - mg(R\sin\theta + \cos\theta) + kR\cos\theta R\sin\theta.$$

L'equazione del moto è:

$$((3/2)M + 2m)R^2\ddot{\theta} = \frac{k}{2}R\sin 2\theta - (M+m)g\sin\theta - mg\cos\theta.$$

(e) Risulta $T = (1/2) I_{O_z} \dot{\theta}^2$ e

$$\Pi = -kR\cos\theta(-R\sin\theta)\dot{\theta} + Mg(-R\sin\theta)\dot{\theta} + mg(-R\sin\theta - R\cos\theta)\dot{\theta}.$$

Si verifica facilmente che $\dot{T} = \Pi$ dà l'equazione del moto ottenuta nel punto precedente.

(f)

$$\ddot{\theta} = -\frac{\left(\frac{M}{2} + m\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)g}{\left(\frac{3}{2}m + 2m\right)R}$$