**Università del Salento**
Facoltà di Ingegneria
Corsi di Laurea in Ingegneria Industriale e Civile
Prova scritta di Meccanica Razionale
10 giugno 2015
**Soluzioni**

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Si consideri una lamina quadrata omogenea di massa $m$ e lato $l$. Dire quale tra le seguenti affermazioni è errata.
   - ■ Il suo tensore centrale d'inerzia è diagonale in ogni base ortogonale.
   - ☐ Il suo tensore centrale d'inerzia ammette un piano di autovettori.
   - ☐ Il suo tensore centrale d'inerzia è diagonale rispetto ad ogni base ortogonale che abbia un vettore ortogonale al piano contenente la lamina.
   - ☐ Il momento d'inerzia rispetto alla sua diagonale è pari a $\frac{1}{12}ml^2$.
   - ☐ Il momento d'inerzia rispetto ad un qualunque asse giacente nel piano del quadrato e passante per il centro è pari a $\frac{1}{12}ml^2$.
2. Quale tra le seguenti affermazioni sulle equazioni cardinali della dinamica è falsa?
   - ■ Le equazioni permettono di determinare il moto di ogni sistema meccanico.
   - ☐ La prima equazione cardinale della dinamica è una condizione necessaria, soddisfatta da tutti i moti di un sistema meccanico.
   - ☐ La seconda equazione cardinale della dinamica è una condizione necessaria, soddisfatta da tutti i moti di un sistema meccanico.
   - ☐ Le equazioni cardinali della dinamica permettono di determinare il moto di ogni sistema rigido.
   - ☐ Una tra le altre affermazioni è falsa.
3. Quale tra le seguenti affermazioni sulle equazioni cardinali della dinamica è vera?
   - ■ La prima equazione da sola non permette di determinare il moto del baricentro di un sistema rigido.
   - ☐ La prima equazione cardinale della dinamica è una equazione che può essere sempre risolta indipendentemente dalla seconda equazione cardinale della dinamica.
   - ☐ La seconda equazione cardinale della dinamica da sola fornisce il moto di un qualunque sistema rigido.
   - ☐ Le due equazioni cardinali della dinamica non hanno senso per un sistema meccanico che non sia rigido.
   - ☐ Le due equazioni cardinali della dinamica permettono di determinare il moto del baricentro per un qualsiasi sistema meccanico.
4. Per quale motivo le equazioni cardinali della dinamica per un corpo rigido soddisfano il principio del determinismo meccanico?
   - ■ Perché costituiscono un sistema di 6 equazioni differenziali in 6 incognite esplicitabile rispetto alle derivate seconde delle incognite.
   - ☐ Perché costituiscono un sistema di 6 equazioni algebriche lineari in 6 incognite con determinante non nullo.
   - ☐ Perché non è possibile alcun moto caotico per un corpo rigido.
   - ☐ Perché il moto del corpo rigido è univocamente determinato dalle forze interne.
   - ☐ Perché il moto del corpo rigido è particolarmente regolare.
5. Quale tra le seguenti proposizioni caratterizza il principio di D'Alembert?
   - ■ Permette di riformulare le equazioni dinamiche come condizioni di equilibrio.
   - ☐ È applicabile solo ai corpi rigidi.

- ☐ Riguarda esclusivamente la statica dei sistemi meccanici.
- ☐ Non è applicabile alla dinamica dei punti materiali.
- ☐ Non dà informazioni sul moto dei sistemi meccanici.

6. Quale tra le sequenti affermazioni sulle equazioni di Eulero–Lagrange è falsa?
   - ■ Le equazioni permettono di ricavare le reazioni vincolari.
   - ☐ Le equazioni permettono di determinare il moto di un sistema meccanico sotto opportune ipotesi.
   - ☐ Le equazioni sono formulate per sistemi con vincoli olonomi, ideali e bilateri.
   - ☐ Le equazioni possono essere anche formulate anche per sistemi non conservativi.
   - ☐ Le equazioni sono formulate per sistemi meccanici non necessariamente rigidi.

Parte 2: Teoria.

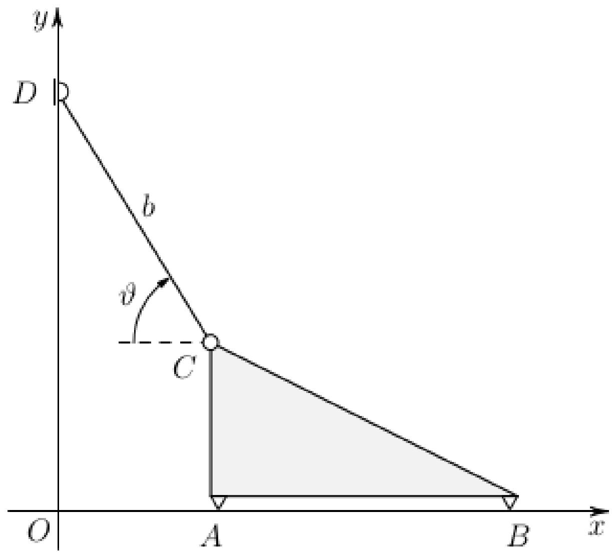
1. Dimostrare la formula che dà la potenza per i sistemi rigidi
$$\Pi = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_Q + \mathbf{M}_Q \cdot \boldsymbol{\omega}$$
2. Dimostrare il Teorema di Koenig:
$$T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_G\|^2 + T^{(G)}.$$
3. Dimostrare il Teorema dell'energia cinetica:
$$\dot{T} = \Pi$$

Parte 3: Esercizio

1. Nel sistema di figura, sito nel piano verticale con l'asse $y$ diretto come la verticale ascendente, una lamina omogenea di massa $M$ a forma di triangolo rettangolo, con i cateti di lunghezza $|AB| = b$ e $|AC| = b/2$, può traslare mantenendo il suo lato $AB$ orizzontale. L'asta $DC$ omogenea di lunghezza $b$ e massa $m$ ha l'estremo $C$ incernierato su uno spigolo della lamina, mentre l'altro estremo è vincolato a muoversi verticalmente. Si considerino tutti i vincoli ideali e si scelga come coordinata libera l'angolo orario $\vartheta$ che l'orizzontale forma con la direzione dell'asta.
   (a) Determinare la coppia antioraria $\gamma$ che applicata sull'asta $CD$ garantisce la configurazione di equilibrio con $y_D = 0$ e $x_A > 0$.
   (b) Determinare le reazioni vincolari in corrispondenza della configurazione di equilibrio del punto precedente.

   Si supponga ora la coppia $\gamma$ assente:
   a. Scrivere l'equazione pura del moto.
   b. Determinare l'accelerazione della lamina nell'istante $t_0$, in cui il sistema è istantaneamente in quiete con $y_D(t_0) = 0$ e $x_A(t_0) > 0$.
   c. Nelle ipotesi del punto precedente determinare le reazioni vincolari esterne.

Soluzione. Premettiamo che le forze che agiscono sul sistema meccanico sono i vettori applicati $(-mg\mathbf{vj}, G_1)$, $(-mg\mathbf{vj}, G_2)$, $(\vec{\Phi}_A, A)$, $(\vec{\Phi}_B, B)$, $(\vec{\Phi}_D, D)$ dove $G_1$ è il baricentro dell'asta e $G_2$ è il baricentro del triangolo. Il sistema di riferimento scelto ha l'asse $\mathbf{vj}$ verso l'alto e l'asse $\mathbf{vi}$ coincidente con la guida.




Per quanto riguarda le coordinate dei punti di interesse si ha:

$$\vec{OA} = b\cos\theta \mathbf{vi}$$
$$\vec{OB} = (b\cos\theta + b)\mathbf{vi}$$
$$\vec{OD} = (\frac{b}{2} + b\sin\theta)\mathbf{vj}$$
$$\vec{OC} = b\cos\theta\mathbf{vi} + \frac{b}{2}\mathbf{vj}$$
$$\vec{OG_1} = \frac{\vec{OD} + \vec{OC}}{2}$$
$$\vec{OG_2} = \vec{OA} + \frac{b}{3}\mathbf{vi} + \frac{b}{6}\mathbf{vj}$$

Nel seguito servirà anche:

$$\vec{v}_{G_1} = \frac{b}{2}\dot{\theta}(-\sin\theta\mathbf{vi} + \cos\theta\mathbf{vj}).$$

**(a)** Dalla prima equazione cardinale della statica si ottiene facilmente $\vec{\Phi}_D = \vec{0}$, essendo $\vec{\Phi}_D$ parallela a **vi**. Infatti, i vincoli sono lisci e le reazioni vincolari sono ortogonali ai vincoli.

Si può applicare la seconda equazione cardinale della statica alla sola asta, calcolando i momenti rispetto al punto $C$ (considerando che il momento di $\vec{\Phi}_D$ è $\vec{0}$!):

$$\vec{CG_1} \times (-mg\mathbf{vj}) + \gamma\mathbf{vk} = \vec{0}. \tag{1}$$

Essendo $y_D = 0$, per $x_D > 0$ si ha $\theta = \frac{\pi}{6}$; sostituendo nell'equazione precedente si ottiene

$$-\frac{b}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{vi} + \frac{1}{2}\mathbf{vj}\right) \times (-mg\mathbf{vj}) + \gamma\mathbf{vk} = 0 \tag{2}$$

da cui $\gamma = -mgb\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Si può risolvere il problema anche con il principio dei lavori virtuali:

$$\delta L = (-mg\mathbf{vj}) \cdot \delta G_1 + (-Mg\mathbf{vj}) \cdot \delta G_2 + \gamma(-\delta\theta) = 0, \tag{3}$$

con lo stesso risultato per $\gamma$.

**(b)** Si tratta di risolvere il sistema delle due equazioni cardinali della statica:

$$\vec{\Phi}_D - mg\mathbf{vj} - Mg\mathbf{vj} + \vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_B = \vec{0}$$
$$\vec{CD} \times \vec{\Phi}_D + \vec{CG_1} \times (-mg\mathbf{vj}) + \gamma\mathbf{vk} + \vec{CG_2} \times (-Mg\mathbf{vj}) + \vec{CB} \times \vec{\Phi}_B = \vec{0},$$

da cui $\Phi_{Dx} = 0$ come sopra. Per le altre equazioni risulta:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{Ay} = -\Phi_{By} + (m+M)g \\
&\frac{b}{3}(\mathbf{vi} - \mathbf{vj}) \times (-Mg\mathbf{vj}) + b(\mathbf{vi} - \frac{1}{2}\mathbf{vj}) \times \Phi_{By}\mathbf{vj} = \\
&= -\frac{Mgb}{3}\mathbf{vk} + \Phi_{By}\mathbf{vk} = 0,
\end{aligned}$$

da cui si ricava $\Phi_{By}$ e poi $\Phi_{Ay}$.

**(c)** Siccome il sistema ha un grado di libertà si può usare l'equazione $\dot{T} = \Pi$. Risulta:

$$\begin{aligned}
T_{\text{asta}} =& \frac{1}{2}m\|\vec{v}_{G_1}\|^2 + \frac{1}{2}I_{G_1}\dot{\theta}^2 \\
=& \frac{1}{2}m\frac{b^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mb^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}mb^2\dot{\theta}^2, \\
T_{\text{triang}} =& \frac{1}{2}M\dot{x}_C^2 = \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2\sin^2\theta, \\
\Pi =& -mg\mathbf{vj}\cdot\vec{v}_{G_1} = -mg\dot{\theta}\frac{b}{2}\cos\theta, \\
T =& T_{\text{asta}} + T_{\text{triang}}.
\end{aligned}$$

**(d)** Basta sostituire nell'equazione del punto precedente i valori $\dot{\theta} = 0$ e $\theta = -\frac{\pi}{6}$, poichè questo implicano le condizioni assegnate, e ricavare $\ddot{\theta}$.

**(e)** Si possono usare le due equazioni cardinali della dinamica. Risulta

$$\begin{aligned}
&\vec{Q} = m\vec{v}_{G_1} + M\vec{v}_C \\
&\vec{\Phi}_D - mg\mathbf{vj} - Mg\mathbf{vj} + \vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_B = \dot{\vec{Q}}, \\
&C\vec{G}_1 \times (-mg\mathbf{vj}) + C\vec{G}_2 \times (-Mg\mathbf{vj}) + C\vec{B} \times \vec{\Phi}_B = \dot{\vec{K}}_{C\,\text{asta}} + \dot{C} \times \vec{Q}_{\text{asta}} + \dot{\vec{K}}_{C\,\text{triang}}
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\vec{K}_{C\,\text{asta}} =& mC\vec{G}_1 \times \vec{v}_{G_1} + I_{G_1}(-\dot{\theta}\mathbf{vk}) \\
\vec{K}_{C\,\text{triang}} =& MC\vec{G}_2 \times \vec{v}_{G_2}.
\end{aligned}$$