Università del Salento
Facoltà di Ingegneria
Corsi di Laurea in Ingegneria Industriale e Civile
Prova scritta di Meccanica Razionale
24 giugno 2015
Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Si consideri un sistema meccanico piano formato da una lamina quadrata in cui uno dei vertici è vincolato a muoversi lungo una circonferenza. Dire quale tra le seguenti affermazioni è falsa.
   - ■ Il vincolo è anolonomo.
   - □ Il sistema ha due gradi di libertà.
   - □ Il sistema può essere soggetto a forze d'attrito.
   - □ Il sistema può essere soggetto alla forza peso.
   - □ Il piano può essere orientato verticalmente rispetto alla forza peso.
2. Si consideri una lamina quadrata omogenea di massa m e lato l con un buco circolare nel centro, avente raggio $r < l/2$. Dire quale tra le seguenti affermazioni è errata.
   - ■ Il suo tensore centrale d'inerzia ha un autovalore nullo.
   - □ Il suo tensore centrale d'inerzia ammette un piano di autovettori.
   - □ Il suo tensore centrale d'inerzia è diagonale rispetto ad ogni base ortogonale che abbia un vettore ortogonale al piano contenente la lamina.
   - □ Il suo baricentro si può calcolare usando la simmetria materiale.
   - □ Il suo moto in un piano ha tre gradi di libertà.
3. Quale tra le seguenti affermazioni sui vincoli ideali è falsa?
   - ■ L'ipotesi di vincolo ideale non è necessaria alla formulazione delle equazioni di Eulero–Lagrange.
   - □ Il principio dei lavori virtuali è formulato per vincoli ideali.
   - □ Un corpo rigido con un asse fisso è un sistema meccanico con vincoli ideali.
   - □ I vincoli ideali possono essere unilateri o bilateri.
   - □ Gli spostamenti virtuali in un punto di un vincolo ideale possono essere unilateri.
4. Quale tra le seguenti affermazioni sulle forze conservative è errata?
   - ■ Una forza conservativa può dipendere dalla velocità.
   - □ Le forze conservative ammettono potenziale.
   - □ Le forze conservative sono posizionali.
   - □ Il potenziale non è univocamente definito.
   - □ Se le forze sono conservative allora anche le forze generalizzate lo sono.
5. Quale tra i seguenti è un esempio di vincolo unilatero?
   - ■ Asta di lunghezza l che si muove all'interno di un cubo di lato $L \geq l$.
   - □ Corpo rigido con punto fisso.
   - □ Corpo rigido con asse fisso.
   - □ Disco che rotola su una guida rettilinea senza strisciare.
   - □ Punto che si muove sulla superficie di una sfera.
6. Siano A e B due punti di un atto di moto rigido piano. Dire quale delle seguenti affermazioni è errata.
   - ■ Le componenti ortogonali ad AB di $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ sono sempre uguali.
   - □ Le componenti ortogonali ad AB di $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ sono arbitrarie.

- ☐ $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ possono esse uguali.
- ☐ Le componenti lungo la congiungente AB di $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ sono sempre uguali.
- ☐ $\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{\omega} \times BA$.

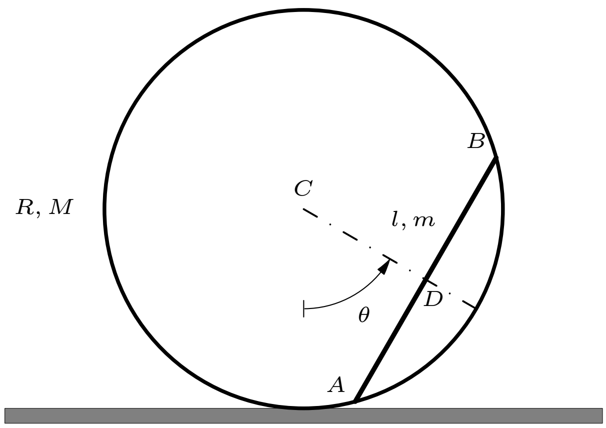
7. Sia I_O il tensore d'inerzia di un sistema materiale. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
   - ■ Il suo determinante può essere nullo.
   - ☐ I_O può ammettere autovalori immaginari puri.
   - ☐ I_O può ammettere un autovalore negativo.
   - ☐ I_O può ammettere tre autovalori nulli.
   - ☐ La sua traccia può essere nulla.

Parte 2: Teoria.

1. Dimostrare la seconda equazione cardinale della dinamica:
$$\mathbf{M}_{\Omega}^{(e)} = \dot{\mathbf{K}} + \dot{\Omega} \times \mathbf{Q}$$
2. Dimostrare la formula che dà l'espressione di $\dot{\mathbf{K}}_G$, derivata del momento della quantità di moto di un sistema meccanico rispetto al baricentro.
3. Dimostrare che un sistema di forze con $\mathbf{R}_{(\mathcal{S})} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{M}_{(\mathcal{S})} \neq \mathbf{0}$ è equivalente ad una coppia.

Parte 3: Esercizio

1. Nel sistema di figura, sito nel piano verticale, un anello omogeneo, di raggio R e massa m, rotola senza strisciare su una guida orizzontale. L'asta AB, omogenea di lunghezza $l = \sqrt{2}R$ e massa m, è saldata con i due estremi sull'anello. Si scelga come coordinata libera l'angolo antiorario θ che la verticale forma con la congiungente tra il centro geometrico dell'anello C e quello dell'asta D.
   - (a) Determinare le forze ortogonali ad AB che applicate in A garantiscono configurazioni di equilibrio con AB verticale.
   - (b) Determinare il centro di istantanea rotazione dell'asta AB.
   - (c) Esprimere l'energia cinetica del sistema in funzione della coordinata libera.
   - (d) Scrivere l'equazione pura del moto, supponendo che in A agisca una di intensità forza F ortogonale ad AB.
   - (e) Determinare F che garantisce una velocità angolare costante del sistema pari a $\omega_0\mathbf{k}$.
   - (f) Nelle ipotesi del punto precedente, determinarne le reazioni vincolari esterne in funzione del tempo.



Soluzione. Premettiamo che le forze che agiscono sul sistema meccanico sono i vettori applicati $(-mg\mathbf{j}, C)$, $(-mg\mathbf{j}, D)$, $(\vec{\Phi}, H)$, $(\vec{F}, A)$, dove H è il punto di contatto tra l'anello e la guida e $\vec{\Phi}$ è la reazione vincolare. Il sistema di riferimento scelto ha l'asse $\mathbf{j}$ verso l'alto e l'asse $\mathbf{i}$ coincidente con la guida.

Per quanto riguarda le coordinate dei punti di interesse si ha:

$$\vec{OC} = -R\theta\mathbf{i} + R\mathbf{j}$$
$$\vec{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}R(\sin\theta\mathbf{i} - \cos\theta\mathbf{j})$$
$$\vec{CA} = R\sin(\theta - \frac{\pi}{4})\mathbf{i} - R\cos(\theta - \frac{\pi}{4})\mathbf{j}$$

e per le velocità

$$\vec{v}_C = -R\theta\mathbf{i}$$
$$\vec{v}_D = R(-\dot{\theta} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\dot{\theta})\mathbf{i} + R(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\dot{\theta})\mathbf{j}$$
$$\vec{v}_A = R(-\dot{\theta} + \cos(\theta - \frac{\pi}{4})\dot{\theta})\mathbf{i} + R(\sin(\theta - \frac{\pi}{4})\dot{\theta})\mathbf{j}$$

Risulta, inoltre, $\vec{F} = F(\sin\theta\mathbf{i} - \cos\theta\mathbf{j})$.

(a) La prima equazione cardinale della dinamica dà le seguenti informazioni:

$$\Phi_x = -F\sin\theta, \Phi_y = 2mg + F\cos\theta.$$

La seconda equazione cardinale della dinamica, calcolata rispetto al polo C, dà (per $\theta = \frac{\pi}{2}$):

$$\begin{aligned}\vec{M}_C =& \vec{CD} \times (-mg\mathbf{j}) + \vec{CA} \times \vec{F} + \vec{CH} \times \vec{Phi} \\ =& \frac{\sqrt{2}}{2}R\mathbf{i} \times (-mg\mathbf{j}) - R\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} \times F\mathbf{i} - R\mathbf{j} \times (-F\mathbf{i}) = \vec{0}\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$F = \frac{\sqrt{2}mg}{\sqrt{2}-1}$$

Il risultato si può ottenere anche mediante il principio dei lavori virtuali. Risulta:

$$\delta L = (-mg\mathbf{j}) \cdot \delta C + (-mg\mathbf{j}) \cdot \delta D + \vec{F} \cdot \delta A = 0 \tag{1}$$

e si proceda calcolando δC, δD e δA al solito modo, ad esempio:

$$\delta C = -R\delta\theta\mathbf{i},$$
$$\delta D = (-R\delta\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\theta\delta\theta)\mathbf{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2}R\sin\theta\delta\theta)\mathbf{j}$$

e ricavando poi F dall'equazione (1).

I calcoli vanno poi ripetuti per l'altra configurazione, che si ottiene per $\theta = \frac{3}{2}\pi$.

(b) Il centro istantaneo di rotazione del sistema è lo stesso del sistema privato dell'asta. Infatti i punti estremi dell'asta avranno le stesse velocità sia in presenza dell'asta sia in sua assenza, e questi punti si muovono, insieme all'anello, con un moto di rotolamento puro. Pertanto, per il teorema di Chasles applicato ai punti estremi dell'asta, il centro istantaneo di rotazione è il punto H di contatto tra l'anello e la guida.

(c) L'energia cinetica del sistema è la somma dell'energia cinetica dell'asta e dell'anello. Ovviamente, C è il baricentro dell'anello e D è il baricentro dell'asta. Risulta:

$$\begin{aligned}T_{\text{asta}} =& \frac{1}{2}m\|\vec{v}_D\|^2 + \frac{1}{2}I_D\vec{\omega} \cdot \omega \\ =& \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2((-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\sin^2\theta)) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}m(\sqrt{2}R)^2\dot{\theta}^2 \\ T_{\text{anello}} =& \frac{1}{2}m\|\vec{v}_C\|^2 + \frac{1}{2}I_C\vec{\omega} \cdot \omega \\ =& \frac{1}{2}(mR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\theta}^2).\end{aligned}$$

(d) Si può usare l'equazione $\dot{T} = \Pi$ poichè il sistema ha un solo grado di libertà. Quindi è necessario calcolare Π:

$$\begin{aligned}\Pi =& - mg\mathbf{j} \cdot \vec{v}_C - mg\mathbf{j} \cdot \vec{v}_D + \vec{F} \cdot \vec{v}_A \\ =& 0 - mg\frac{\sqrt{2}}{2}R\sin\theta\dot{\theta} + F\sin\theta R(-\dot{\theta} + \cos(\theta - \frac{\pi}{4})\dot{\theta}) - F\cos\theta R(\sin(\theta - \frac{\pi}{4})\dot{\theta})\end{aligned}$$

(e) L'equazione pura del moto $\dot{T} = \Pi$ è di primo grado in F. Pertanto basta porre $\dot{\theta} = \omega_0$ costante; questo ha come conseguenza $\ddot{\theta} = 0$. Sostituendo queste condizioni nell'equazione pura del moto e ricavando F si ha il risultato.

(f) Si deve determinare la reazione vincolare $\vec{\Phi}$. Un modo per determinarla può essere l'utilizzo delle equazioni cardinali della dinamica. La prima equazione:

$$-mg\mathbf{j} - mg\mathbf{j} + \vec{F} + \vec{\Phi} = \dot{\vec{Q}}$$

è sufficiente in quanto fornisce un sistema lineare nelle due incognite Φ_x e Φ_y. Si noti che

$$\vec{Q} = \vec{Q}_{\text{asta}} + \vec{Q}_{\text{anello}}$$

dove

$$\begin{aligned}\vec{Q}_{\text{asta}} =& m\vec{v}_C \\ \vec{Q}_{\text{anello}} =& m\vec{v}_D\end{aligned}$$

pertanto per completare l'esercizio è sufficiente derivare le velocità $\vec{v}_C$ e $\vec{v}_D$ rispetto al tempo e sostituire le grandezze $\dot{\theta} = \omega_0$ costante, $\ddot{\theta} = 0$ e F come ricavata nel punto precedente.