Università del Salento
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSI DI LAUREA IN INGEGNERIA INDUSTRIALE E CIVILE
PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE
07 giugno 2016
Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Dire quanti sono i gradi di libertà del sistema meccanico piano formato da due circonferenze attaccate l'una all'altra mediante una cerniera mobile.

   ■ 4
   □ 3
   □ 2
   □ 1
   □ 5

2. In quale circostanza si conserva l'energia meccanica?

   ■ Nel caso di vincoli ideali, bilateri e fissi e forze attive conservative.
   □ Nel caso di corpi rigidi soggetti a forze arbitrarie.
   □ Nel caso di vincoli olonomi unilateri e fissi.
   □ Nel caso di vincoli olonomi unilateri e fissi e forze attive conservative.
   □ In presenza della sola forza peso.

3. Quale delle seguenti affermazioni sul momento di una forza è vera?

   ■ Il momento di una forza è perpendicolare al piano che contiene la forza e il vettore che congiunge il polo con il punto di applicazione.
   □ Il momento di una forza non dipende dal polo scelto.
   □ Il momento di una forza è una grandezza scalare.
   □ Il momento di una forza non ha influenza sulla dinamica di un corpo rigido a cui la forza è impressa, in generale.
   □ Il braccio di un vettore si può definire solo per forze perpendicolari.

4. Quale tra le seguenti affermazioni sulla Lagrangiana è vera?

   ■ Esistono infinite lagrangiane che dànno le stesse equazioni di Eulero–Lagrange.
   □ La lagrangiana di un sistema meccanico è univocamente determinata.
   □ La lagrangiana determina univocamente le equazioni cardinali della statica.
   □ La lagrangiana dipende dalle reazioni vincolari.
   □ La lagrangiana è funzione delle reazioni vincolari solo nel caso della statica.

5. Quale tra le seguenti affermazioni sugli integrali primi è vera?

   ■ Un sistema meccanico può ammettere più di un integrale primo.
   □ Il corpo rigido non soggetto a forze non ammette integrali primi.
   □ Gli integrali primi sono funzioni a valori vettoriali.
   □ Una funzione non costante non può essere un integrale primo.
   □ L'energia meccanica è un integrale primo di ogni sistema meccanico.

6. Per quale motivo le equazioni cardinali della dinamica per un corpo rigido soddisfano il principio del determinismo meccanico?

   ■ Perché costituiscono un sistema di 6 equazioni differenziali in 6 incognite esplicitabile rispetto alle derivate seconde delle incognite.

- ☐ Perché costituiscono un sistema di 6 equazioni algebriche lineari in 6 incognite con determinante non nullo.
- ☐ Perché non è possibile alcun moto caotico per un corpo rigido.
- ☐ Perché il moto del corpo rigido è univocamente determinato dalle forze interne.
- ☐ Perché il moto del corpo rigido è particolarmente regolare.

7. Quale tra le seguenti affermazioni sugli integrali primi non è corretta?

- ■ Gli integrali primi sono funzioni a valori vettoriali.
- ☐ Gli integrali primi sono espressioni che assumono valori costanti se calcolati lungo una traiettoria del sistema.
- ☐ Gli integrali primi, in generale, non sono solo le funzioni costanti.
- ☐ Se l'energia è conservata essa costituisce un integrale primo.
- ☐ Se una componente della risultante delle forze esterne lungo una direzione è nulla allora esiste una quantità conservata.

8. Quale tra le seguenti è la definizione di baricentro?

- ■ È il centro del sistema delle forze peso.
- ☐ È la media delle posizioni dei punti del sistema.
- ☐ È il centro del sistema di vettori costituito da tutte le posizioni.
- ☐ È il centro di un qualunque sistema di forze.
- ☐ È il centro del poligono d'appoggio.

9. Se una forza non è conservativa, allora:

- ■ In generale non si può scrivere la lagrangiana.
- ☐ Il potenziale dipende dal tempo.
- ☐ La forza generalizzata è costante.
- ☐ La forza dipende linearmente dalla velocità.
- ☐ Il momento risultante è sempre nullo.

10. Sia dato un sistema meccanico costituito da due dischi che giacciono su un piano ed hanno i centri collegati da un'asta. Quanti gradi di libertà ha il sistema?

- ■ 5
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

11. Quale tra i seguenti sistemi meccanici possiede un piano di simmetria materiale?

- ■ Un cilindro retto pieno omogeneo privato di un altro cilindro retto pieno di raggio inferiore e ad esso coassiale.
- ☐ Una sfera piena omogenea privata di una sua parte di forma non specificata.
- ☐ Una sfera piena non omogenea.
- ☐ Un asteroide.
- ☐ Nessuno tra i corpi solidi delle altre risposte.

12. Quale tra le sequenti affermazioni sulle equazioni di Eulero–Lagrange è falsa?

- ■ Le equazioni permettono di ricavare le reazioni vincolari.
- ☐ Le equazioni permettono di determinare il moto di un sistema meccanico sotto opportune ipotesi.
- ☐ Le equazioni sono formulate per sistemi con vincoli olonomi, ideali e bilateri.
- ☐ Le equazioni possono essere anche formulate anche per sistemi non conservativi.

☐ Le equazioni sono formulate per sistemi meccanici non necessariamente rigidi.

Parte 2: Esercizio

1. Una lamina quadrata omogenea di lato ℓ e massa m, può ruotare in un piano verticale (con $\mathbf{j}$ diretto come la verticale ascendente) intorno al suo spigolo O, mediante l'uso di una cerniera. Una molla ideale, di costante elastica $k > 0$, collega lo spigolo C al punto fisso $P \equiv (0, \ell)$. Si considerino tutti i vincoli ideali e si scelga come coordinata libera l'angolo antiorario θ che la verticale forma con la direzione OG, dove G è il centro geometrico della lamina.

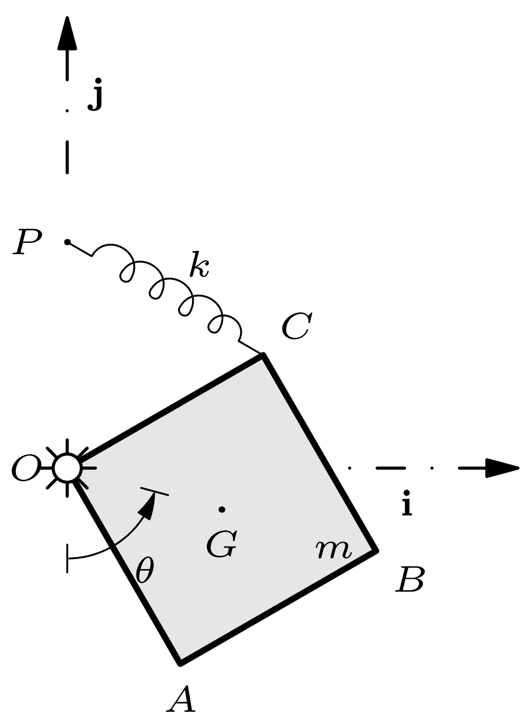
   (a) Determinare le direzioni ed i momenti principali d'inerzia relativi al punto O.

   (b) Determinare i valori di k per i quali la lamina è in equilibrio con il lato OC in configurazione orizzontale.

   (c) Determinare la stabilità delle configurazioni di equilibrio del punto precedente e calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno alle configurazioni di equilibrio stabile.

   (d) Nell'ipotesi in cui la molla è assente, calcolare la velocità e l'accelerazione angolare della lamina al tempo t_f tale che $\theta(t_f) = \pi/6$ sapendo che $\theta(t_0) = \pi/4$ e $\dot{\theta}(t_0) = 0$.

   (e) Nelle ipotesi del punto precedente, determinare le reazioni vincolari al tempo t_f.



Soluzione.

(a) Il sistema è piano, dunque l'asse $\mathbf{k}$ è principale d'inerzia. Inoltre, la retta per OB è un'asse di simmetria materiale, quindi è anche un asse principale d'inerzia. Posto $\mathbf{u} = \vec{OB}/\|\vec{OB}\|$ il terzo vettore di una terna principale è individuato da $\mathbf{e} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{u}$. Rispetto ad una terna principale il tensore di inerzia è diagonale; calcoliamo i 3 valori lungo la diagonale.

I momenti di inerzia rispetto ad assi centrati in O ed individuati dai lati della lamina valgono $\frac{1}{3}m\ell^2$, pertanto si ha $I_{O_k} = \frac{2}{3}m\ell^2$. I momenti di inerzia rispetto ad assi centrati sul baricentro e giacenti nel piano della lamina valgono $\frac{1}{12}m\ell^2$, dunque si ha $I_{O_u} = \frac{1}{12}m\ell^2$. Infine

$$I_{O_e} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{12}\right) m\ell^2.$$

(b) Si ha

$$C = \left(\ell \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), -\ell \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

e $\|\vec{PC}\|^2 = 2\ell^2(1 + \cos(\theta + \frac{\pi}{4}))$. Il potenziale:

$$\begin{aligned} U =& -mgy_G - \frac{1}{2}k\|\vec{PC}\|^2 \\ =& mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - k\ell^2\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \text{cost} \end{aligned}$$

I valori di θ per cui $\vec{OC}$ è orizzontale (cioè proporzionale a $\mathbf{i}$) sono $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\theta_2 = \frac{5\pi}{4}$. Richiedendo che

$$\frac{dU}{d\theta}(\theta_i) = 0$$

per $i = 1, 2$ si ottiene la stessa soluzione $k = mg/(2\ell)$.

(c) Per il valore $k = mg/(2\ell)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_1) &= -\frac{1}{2}mg\ell < 0, \quad \text{eq. stabile} \\ \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_2) &= \frac{1}{2}mg\ell < 0, \quad \text{eq. instabile} \end{aligned}$$

Per trovare la frequenza si usi la formula

$$\omega = \sqrt{-\frac{\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_1}{a(\theta_1)}}$$

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}I_{O_k}\omega^2 = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2, \quad \text{con} \quad a(\theta_1) = \frac{2}{3}m\ell^2, \quad \text{quindi} \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{4\ell}}.$$

(d) Si ha $E_0 = E_f$ perché si conserva l'energia meccanica. Risulta

$$\begin{aligned} E_0 &= T_0 - U_0 = -\frac{1}{2}mg\ell, \\ E_f &= T_f - U_f = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}_f^2 - mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

da cui

$$\dot{\theta}_f = \pm\sqrt{\frac{3g}{2\ell}\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)}$$

(e) Il teorema dell'energia cinetica dà

$$\frac{2}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta = 0$$

da cui $\ddot{\theta}_f = -\frac{3\sqrt{2}g}{4\ell}$. Inoltre

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= m\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ \dot{\vec{Q}} &= m\ell\frac{\sqrt{2}}{2}(\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\theta}^2\mathbf{e}_r) \\ \vec{R}^{(e)} &= H_O\mathbf{i} + (V_O - mg)\mathbf{j} \end{aligned}$$

e dalla prima equazione cardinale della dinamica si ricava

$$H_O\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{16\sqrt{2}}(3\sqrt{6} - 4)mg, \quad V_O\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{16}(31 - 6\sqrt{6})mg.$$