UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE
FACOLTÀ DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Raffaele Vitolo

MANUALE DI PREPARAZIONE AI TEST DI AUTOVALUTAZIONE

relativi a *Geometria e Algebra*

Versione del 15 gennaio 2007

ANNO ACCADEMICO 2005-2006

Indice

1 Introduzione

In questo documento sono introdotti gli argomenti propedeutici al corso di Geometria e Algebra, e, più in generale, a tutte le materie ingegneristiche che fanno uso di Geometria e Algebra.

Può essere utile ai Professori delle Scuole Secondarie leggere le dispense del corso di Geometria e Algebra, reperibili sul sito

`http://poincare.unile.it/vitolo/`,

per 'calibrare' la preparazione degli studenti in base a quello che è richiesto a loro di conoscere per l'esame in oggetto.

Si noti che anche se la Trigonometria è considerata come prerequisito dell'Analisi Matematica ed è ricapitolata nei corsi di recupero di quella materia, è comunque indispensabile per il corso di Geometria e Algebra.

I testi [1, 6] possono essere usati dai docenti universitari come corso 'zero' di matematica per l'Università o dai docenti delle Scuole Superiori come compendio di conoscenze necessarie agli studenti per una proficua frequenza dei corsi universitari. Tuttavia i testi non trattano la geometria euclidea del piano o dello spazio.

Il testo [7] contiene, tra l'altro, la geometria analitica del piano da un punto di vista 'superiore', ossia esposta con la stessa impostazione che è usata per lo sviluppo della geometria analitica dello spazio. In questo documento la trattazione segue la stessa idea, e vuole essere uno spunto per una possibile impostazione didattica.

Il testo può contenere sviste o errori. Nel caso in cui ci si imbattesse in un problema di questo tipo, per favore lo si comunichi all'autore all'indirizzo `raffaele.vitolo@unile.it`. L'autore sarà anche grato per qualsiasi suggerimento riguardante l'impostazione didattica.

Nota. Laddove sia indicato che "È necessario avere la padronanza di…" questo significa che la responsabilità di prepararsi sull'argomento indicato è lasciata al lettore e che l'argomento medesimo, benché non trattato in questo documento, è facilmente reperibile nei testi scolastici.

Ringraziamenti. L'autore è grato a sua moglie Adele Maria Veste per la lettura del testo ed i commenti, soprattutto nella parte di geometria dello spazio.

Informazioni legali : Quest'opera è un esemplare unico riprodotto in proprio con il metodo Xerox presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce. Sono stati adempiuti gli obblighi previsti dal D.P.R. 106 del 15/4/2004 e D.P.R. 252 del 3/5/2006 riguardanti le pubblicazioni in proprio.

2 Polinomi

Notazioni. Saranno usati i seguenti insiemi numerici:

$\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali;

$\mathbb{Z}$ insieme dei numeri interi;

$\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali;

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali;

$\mathbb{C}$ insieme dei numeri complessi.

Il simbolo $\mathbb{K}$ denoterà nel seguito uno tra gli insiemi numerici $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Si suppone che gli insiemi numerici siano tutti contenuti in un insieme $\mathbb{U}$[1].

Definizione 2.1. Sia $x \in \mathbb{U}$ un elemento non appartenente all'insieme numerico $\mathbb{K}$. Sia $n \in \mathbb{N}$.

Si dice *polinomio*, di grado n, a coefficienti in $\mathbb{K}$ ed indeterminata x, l'espressione

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

dove a_0, a_1,..., $a_n \in \mathbb{K}$, ed $a_n \neq 0$.

Si noti che la condizione $a_n \neq 0$ è indispensabile affinché la definizione di grado abbia senso. In assenza di questa condizione, ogni polinomio potrebbe assumere grado arbitrario.

Si denota con $\mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ ed indeterminata x.

Analogamente si possono introdurre i polinomi con un numero arbitrario di indeterminate.

Definizione 2.2. Sia $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, e siano x_1,..., $x_m \in \mathbb{U}$ m elementi non appartenenti all'insieme numerico $\mathbb{K}$. Sia $n \in \mathbb{N}$.

Si dice *polinomio*, di grado n, a coefficienti in $\mathbb{K}$ ed indeterminate $x_1, \ldots,$ x_m l'espressione

$$p(x_1, \ldots, x_m) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \cdots \\ \cdots + a_{mm} x_m^2 + \cdots + a_{m\cdots m} x_m^n,$$

dove a_0, a_1,..., $a_{m\cdots m} \in \mathbb{K}$, ed almeno uno tra i coefficienti con n indici è diverso da 0.

[1]Tale insieme è in alcuni testi detto *universo*

In pratica, un polinomio di grado n in m indeterminate è una somma in cui gli addendi sono prodotti di k indeterminate, con $k \leq n$, moltiplicate per un coefficiente numerico.

Un polinomio in m indeterminate che sia composto di un unico addendo con coefficiente non nullo si dice *monomio*.

Il polinomio 0, con tutti i coefficienti nulli, si dice polinomio *nullo*.

Si denota con $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ ed indeterminate $x_1, \ldots, x_n$.

Esempio 2.1. Si considerino due indeterminate, x ed y. Allora un polinomio di secondo grado in $\mathbb{R}[x, y]$ ha espressione

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{22} y^2.$$

Usando proprietà algebriche delle operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{K}$ si dimostra la seguente proposizione.

Proposizione 2.1 (Principio d'identità dei polinomi). Due polinomi in m indeterminate p, $q \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ sono uguali se e solo se sono uguali i coefficienti degli addendi che contengono le stesse indeterminate come fattori.

Si definiscono le seguenti operazioni tra polinomi. Siano $p, q \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$. Allora:

- la *somma* $p + q$ è il polinomio nelle stesse indeterminate che ha come coefficienti dei propri monomi la somma dei coefficienti dei monomi corrispondenti di p, q;
- il *prodotto* pq è il polinomio nelle stesse indeterminate che ha per monomi i prodotti tra ogni monomio di p ed ogni monomio di q, e per coefficienti il prodotto dei relativi coefficienti.

Le seguenti identità valgono per polinomi in due indeterminate x ed y, e possono essere dimostrate usando le proprietà delle operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{K}[x, y]$.

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
2. $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$;
3. $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$;

4. $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$;

5. $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$.

Più in generale:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x+y)^i,$$

dove

$$\binom{n}{i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{(n-i)!i!};$$

i precedenti coefficienti possono essere anche ricavati con la tecnica del triangolo di Tartaglia. Inoltre

$$\begin{aligned}
a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}), && n \textbf{ dispari},\\
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), && n \textbf{ qualunque},\\
a^n - b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}), && n \textbf{ pari}.
\end{aligned}$$

Teorema 2.1 (Divisione euclidea.). Siano $p(x)$, $d(x) \in \mathbb{K}[x]$ due polinomi di grado n, m, rispettivamente, con $m \leq n$. Allora esistono e sono unici due polinomi $q(x)$, $r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tali che

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x),$$

con $\mathrm{gr}(r(x)) \leq \mathrm{gr}(d(x))$.

La dimostrazione del teorema è costruttiva, si veda [2].

Esempio 2.2. Si divida $2x^4 + 5x^3 - x^2 + 3x + 1$ per $x^2 + x - 2$.

$$\begin{aligned}
2x^4 + 5x^3 - x^2 + 3x + 1 &= (2x^2)(x^2 + x - 2) + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1\\
&= (2x^2 + 3x)(x^2 + x - 2) + 9x + 1
\end{aligned}$$

Definizione 2.3. Siano $p(x)$, $d(x) \in \mathbb{K}[x]$ due polinomi di grado n, m, rispettivamente, con $m \leq n$. Si dice che $p(x)$ è divisibile per $d(x)$ se, nella divisione euclidea di $p(x)$ per $d(x)$, si ha $r(x) = 0$.

Definizione 2.4. Sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Si dice *radice* di $p(x)$ un numero $x_0 \in \mathbb{K}$ tale che il numero $p(x_0)$, ottenuto sostituendo all'indeterminata x il numero x_0, sia 0.

Teorema 2.2 (Ruffini). Sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, e sia x_0 una radice di $p(x)$. Allora $p(x)$ è divisibile per $(x - x_0)$.

Dimostrazione. Infatti, dal teorema 2.1 si ha

$$p(x) = (x - x_0)q(x) + r(x).$$

Sostituendo x_0 ad x in entrambi i membri si ottiene

$$0 = 0q(x) + r(x_0),$$

ma $r(x)$ ha grado minore del grado di $(x - x_0)$, dunque ha grado 0. E l'unico polinomio di grado 0 che si annulla in x_0 è il polinomio nullo. $\boxed{QED}$

La divisione di un polinomio $p(x)$ per un polinomio di primo grado della forma $x - a$, anche se a non è una radice del polinomio, si può effettuare in modo semplificato rispetto alla divisione euclidea, anche se il metodo è lo stesso (si tratta comunque di effettuare divisioni successive del termine di grado più alto come nell'esempio 2.2).

Esempio 2.3. Si vuole dividere $3x^4 + 5x^3 - 2x - 3$ con $x - 2$. Si ha

	3	5	0	-2	-3
2		6	22	44	84
	3	11	22	42	81

dunque, in termini di polinomi

$$3x^4 + 5x^3 - 2x - 3 = (x - 2)(3x^3 + 11x^2 + 22x + 42) + 81.$$

Definizione 2.5. Sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, e sia x_0 una radice di $p(x)$. Si dice che x_0 è una radice *di molteplicità* k di $p(x)$ se

$$p(x) = (x - x_0)^k q(x),$$

dove $q(x_0) \neq 0$.

Equivalentemente, si dice che x_0 è una radice di molteplicità k di $p(x)$ se x_0 è una radice di $p(x)$ tale che $p(x)$ è divisibile per $(x - x_0)^k$ ma non per $(x - x_0)^{k+1}$.

Si assume una buona dimestichezza con le operazioni tra frazioni algebriche.

3 Equazioni algebriche

Nello studio delle equazioni algebriche è necessario introdurre una terminologia che permetta di distinguere i ruoli che giocano le quantità indeterminate, che in questo caso prendono il nome di *variabili*.

Le variabili possono essere di due tipi:

- le **incognite**, che sono variabili soggette ad una o più *condizioni* (di solito *equazioni*);
- i **parametri**, che sono variabili *non* soggette a condizioni, a cui può essere assegnato un qualsiasi valore in $\mathbb{K}$ ad arbitrio.

Siano $x_1, \ldots, x_m$ variabili, e sia

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{K}\}$$

l'insieme dei valori in $\mathbb{K}$ che è possibile attribuire alle variabili.

Un sottoinsieme dell'insieme $S \subset V$ può essere rappresentato in uno dei seguenti modi:

- i suoi elementi possono essere tutti e soli gli elementi di V soddisfacenti una o più condizioni (di solito equazioni); questa si dice (impropriamente) **rappresentazione cartesiana** di S;
- i suoi elementi possono essere noti in funzione di uno o più parametri; questa si dice **rappresentazione parametrica** di S.

Ad esempio, se $m = 2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, gli elementi di V possono essere identificati con le coordinate dei punti del piano ed un sottoinsieme S di V può essere una retta, una conica, ecc..

Definizione 3.1. Sia $p(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ un polinomio di grado n nelle indeterminate x_1,. . . ,x_m. L'uguaglianza

$$p(x_1, \ldots, x_m) = 0 \tag{1}$$

si dice *equazione algebrica di grado n nelle incognite* x_1,. . . ,x_m. Si dice *soluzione* dell'equazione (1) un vettore di numeri $(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{m,0})$, con $x_{i,0} \in \mathbb{K}$ per $i = 1, \ldots, m$ tale che

$$p(x_{1,0}, \ldots, x_{m,0}) = 0.$$

Ovviamente, un'equazione di grado 0 non ha soluzioni oppure ha per soluzione qualsiasi valore delle incognite.

Sia $m = 1$; ovvero, si considerino equazioni in una sola incognita.

Caso $n = 1$ L'equazione $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ha l'unica soluzione $x = -b/a$ ottenuta dividendo per a ed aggiungendo $-b/a$ ad entrambi i membri. Si noti che, se i coefficienti a, b sono in $\mathbb{Z}$, l'equazione ammette soluzioni in $\mathbb{Z}$ se e solo se b è un multiplo di a.

Caso $n = 2$ L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ e nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ha le due soluzioni

$$x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Queste soluzioni coincidono se $b^2 - 4ac = 0$.

Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esistono soluzioni in $\mathbb{R}$ se e solo se $b^2 - 4ac \geq 0$. Tuttavia, se $b^2 - 4ac < 0$ le soluzioni sono in $\mathbb{C}$ e sono l'una la coniugata dell'altra.

Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ esistono soluzioni in $\mathbb{Q}$ se e solo se $b^2 - 4ac$ è il quadrato di un numero razionale. Tuttavia, anche se questo non si verifica, possono esistere soluzioni in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$.

Caso $n = 3$**,** 4 Esistono formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado, dovute a Cardano ed ad un suo allievo. Tuttavia queste formule sono di scarsa utilità. Concretamente si utilizza il teorema di Ruffini per abbassare di grado il polinomio, oppure si usa la regola di Newton per trovare soluzioni approssimate.

Caso $n \geq 5$ In questo caso Galois dimostrò che non esiste una formula risolutiva definita tramite radicali, per cui l'unica via per trovare radici è il calcolo numerico. Si ricordi, tuttavia che:

1. vale il *teorema fondamentale dell'algebra*: ogni polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$ di grado n si decompone nel prodotto di n fattori di primo grado, dunque ammette n radici, contate ciascuna con la sua molteplicità;
2. le radici di un polinomio a coefficienti in $\mathbb{R}$ sono in $\mathbb{R}$ od in $\mathbb{C}$; se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice del polinomio, allora anche il coniugato di α è radice del polinomio.

3. per il punto precedente, ogni polinomio di grado dispari ammette sempre almeno una radice reale.

Nota 3.1. Sapere se un'equazione a coefficienti interi, anche in una sola incognita, ammetta soluzioni intere è in generale un problema difficile. Ad esempio, sapere se l'equazione

$$x^n + y^n = z^n$$

ammetta soluzioni intere non banali (cioè quelle per cui una tra le oncognite è nulla) per $n > 2$ è un problema matematico (*teorema di Fermat)*, al quale è stata data risposta negativa solo nel 1995 da Wiles, circa due secoli dopo. Si noti che le soluzioni dell'equazione precedente per $n = 2$ sono le cosiddette *terne pitagoriche*.

Definizione 3.2. Siano $p_i(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$, $i = 1, \ldots, k$ polinomi di grado n_i nelle indeterminate $x_1, \ldots, x_m$. Le uguaglianze

$$\begin{cases} p_1(x_1, \ldots, x_m) = 0 \\ p_2(x_1, \ldots, x_m) = 0 \\ \cdots \\ p_k(x_1, \ldots, x_m) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

sono dette *sistema di k equazioni algebriche di grado n nelle incognite* $x_1, \ldots, x_m$, ove $n = n_1 \cdots n_k$. Si dice *soluzione* dell'equazione (1) un vettore di numeri $(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{m,0})$, con $x_{i,0} \in \mathbb{K}$ per $i = 1, \ldots, m$ tale che

$$p_i(x_{1,0}, \ldots, x_{m,0}) = 0 \quad \text{per} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Se $n_1 = \cdots = n_k = 1$ il sistema si dice *lineare*.

È necessario saper risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite x, y

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

per sostituzione, sapendo dire quando il metodo è applicabile (ovvero quando esista un'unica soluzione). È necessario anche sapere quando il sistema ha infinite soluzioni o nessuna soluzione.

È necessario saper risolvere sistemi elementari di due equazioni, di secondo grado, in due variabili, utilizzando la sostituzione.

Osservazione 3.1. Le equazioni che contengono radicali algebrici di polinomi possono essere ricondotte ad equazioni algebriche con la tecnica dell'elevamento a potenza. Si ricordi di effettuare la verifica delle soluzioni ottenute con questo metodo, poiché gli elevamenti a potenza possono aggiungere soluzioni all'equazione di partenza. È necessario avere padronanza di questo metodo.

Esercizio 3.1. Trovare le soluzioni in $\mathbb{R}$ (ed eventualmente in $\mathbb{C}$) delle seguenti equazioni algebriche:

1. $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$;
2. $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = 0$;
3. $5x^3 + 3 = 0$;
4. $2x^6 - 5x^3 - 3 = 0$;

determinare, per ogni radice, la molteplicità.

Esercizio 3.2. Trovare le soluzioni in $\mathbb{R}$ (ed eventualmente in $\mathbb{C}$) dei seguenti sistemi di equazioni algebriche:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - xy + y^2 - 39 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x^2 - y - 13 = 0 \\ x^2 y + 36 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Esercizio 3.3. Trovare le soluzioni in $\mathbb{R}$ (ed eventualmente in $\mathbb{C}$) delle seguenti equazioni irrazionali:

1. $\sqrt[3]{x^3 - 5x + 4} + x - 1 = 0$;
2. $\sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 + 8} = 6$.

4 Elementi di geometria euclidea del piano

La geometria euclidea del piano non può essere qui riassunta per motivi di tempo. Un qualunque testo di geometria euclidea del piano contenente i seguenti argomenti può essere usato allo scopo:

1. Concetti primitivi e postulati.
2. Poligoni e triangoli.
3. Rette perpendicolari e rette parallele.
4. Relazione tra gli elementi dei poligoni e dei triangoli.
5. Trapezi e parallelogrammi.
6. Luoghi geometrici e punti notevoli di un triangolo.
7. Circonferenza e cerchio.
8. Poligoni inscritti, circoscritti, regolari.
9. Equivalenza delle figure piane.
10. Misura delle grandezze, rapporti e proporzioni.
11. Similitudini tra figure piane.
12. Circonferenza e cerchio.

5 Elementi di geometria euclidea dello spazio

Nota 5.1. La matematica moderna è una teoria assiomatico-deduttiva basata sulla logica matematica e sulla teoria degli insiemi. La geometria euclidea è contenuta in questa visione, pertanto il linguaggio della teoria degli insiemi è il principale mezzo di espressione della geometria euclidea. Questo è il motivo per cui, per esempio, termini come 'appartenenza' sono preferiti ai termini 'passare per', 'giacere in', ecc., oppure i termini come 'luogo geometrico', 'regione', 'figura' sono rimpiazzati dal termine 'insieme' in queste note.

In questo paragrafo $\mathcal{S}$ denota l'insieme dei punti dello spazio euclideo.

5.1 Preliminari

Dando per assunti i postulati relativi alla geometria del piano, si richiamano ora i postulati relativi alla geometria dello spazio.

1. Tre punti nello spazio, non appartenenti ad una stessa retta, appartengono ad un unico piano.
2. Se due punti di una retta appartengono ad un piano, essa appartiene al piano.
3. Ogni piano $\alpha \subset \mathcal{S}$ divide gli ulteriori punti dello spazio in due insiemi, detti *semispazi di origine* α, tali che un segmento AB avente gli estremi nello stesso semispazio ha intersezione vuota con α e, invece, un segmento CD avente gli estremi in semispazi diversi incontra il piano in un punto.

Dai precedenti postulati si deduce che

1. Se un segmento AB ha in comune con un piano α un solo punto C, diverso da A e da B, i due punti A e B giacciono da parti opposte di α.
2. Se una retta r ha in comune con un piano α un solo punto P, questo punto é l'origine comune di due semirette che giacciono da parti opposte di α.

Rette giacenti nello stesso piano si dicono *complanari* (due rette complanari o sono incidenti o sono parallele); rette che non sono complanari si dicono *sghembe*.

5.2 Rette e piani

Si dimostra che:

Teorema 5.1. Due piani distinti, aventi in comune un punto, hanno in comune una retta che passa per quel punto.

Una retta nello spazio è contenuta da infiniti piani; l'insieme di questi piani si dice *fascio di piani* e la retta *asse del fascio*. L'insieme degli infiniti piani passenti per un punto si dice *stella di piani* e il punto *centro della stella*.

Nello spazio esistono infinite rette perpendicolari ad una retta data in un suo punto dato. Si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 5.2. Sia r una retta e $P \in r$ un suo punto. L'insieme delle rette perpendicolari ad r in un P è un piano.

Dal teorema seguono le proprietà, riguardanti la partizione dello spazio in due semispazi mediante un piano:

1. se un segmento AB ha in comune con un piano α un solo punto C, diverso da A e da B, i due punti A e B giacciono in due semispazi distinti di origine α;

2. se una retta r ha in comune con un piano α un solo punto P, questo punto è l'origine comune di due semirette che giacciono da parti opposte di α.

Altri risultati sulla perpendicolarità tra piani e rette sono i seguenti.

1. Sia $r \subset \mathcal{S}$ una retta e $P \in \mathcal{S}$ un punto. Allora esiste un unico piano perpendicolare ad r e contenente P.

2. *Teorema delle tre perpendicolari.* Sia r una retta perpendicolare ad un piano α in P. Sia $s \subset \alpha$ una retta per P. Allora ogni retta in α perpendicolare ad s in P è perpendicolare al piano individuato dalle rette r ed s.

3. Siano $\alpha \subset \mathcal{S}$ un piano e $P \in \mathcal{S}$ un punto. Allora esiste un'unica retta perpendicolare ad α e contenente P.

4. Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.

5. Se due rette sono parallele, ogni piano che interseca l'una interseca anche l'altra.

6. Se due rette sono parallele, ogni piano perpendicolare ad una è pure perpendicolare all'altra.

7. Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.

5.3 Proiezioni, distanze, parallelismo

Definizione 5.1. Sia $\pi \subset \mathcal{S}$ un piano e sia $P \in \mathcal{S}$ un punto. Si dice *proiezione di un punto sopra il piano* l'intersezione $r \cap \pi$ della retta r passante per p e perpendicolare a π con il piano π.

Si chiama poi *proiezione di un insieme su un piano* l'insieme costituita dalle proiezioni sopra il piano dei punti della figura data. Si dimostrano i seguenti risultati.

1. La proiezione di una retta sopra un piano, non perpendicolare ad essa, è una retta.

2. La proiezione di un segmento sopra un piano è il segmento che ha per estremi le proiezioni degli estremi del segmento dato.

3. Dato un punto $P \in \mathcal{S}$ ed un piano $\alpha \subset \mathcal{S}$ tali che $P \notin \mathcal{S}$, siano PH un segmento perpendicolare ad α con $H \in \alpha$, e PA un altro segmento con $A \in \alpha$. Allora:

   (a) la lunghezza di PH è minore od uguale alla lunghezza di PA;

   (b) due segmenti di primo estremo P e secondo estremo in α con proiezioni congruenti sono congruenti;

   (c) due segmenti di primo estremo P e secondo estremo in α aventi proiezioni diseguali sono diseguali ed ha lunghezza maggiore quello che ha proiezione maggiore.

Siano $P \in \mathcal{S}$ un punto e $\pi \subset \mathcal{S}$ un piano. Il segmento perpendicolare a π con un estremo in P e l'altro estremo appartenente a π è il segmento di minima lunghezza fra tutti quelli che partono dal punto e terminano sul piano e si chiama *distanza del punto dal piano.*

L'angolo acuto che una retta forma con la sua proiezione sopra il piano si chiama *angolo della retta col piano*; si dimostra che questo è minore dell'angolo che la retta forma con ogni altra retta uscente da quel punto e giacante nel piano.

Definizione 5.2. Una retta e un piano si dicono *paralleli* quando non hanno alcun punto in comune.

L'esistenza di rette e piani paralleli è provata dal seguente teorema.

Teorema 5.3. Se una retta passante per un punto esterno ad un piano è parallela ad una retta del piano, è parallela al piano.

Conseguenze notevoli del precedente teorema sono:

1. Una retta e un piano perpendicolari a una medesima retta, in punti distinti, sono paralleli.
2. Siano $\pi \subset \mathcal{S}$ un piano ed r una retta parallela a π. Se π' è un piano contenente r e non parallelo a π, allora la retta $\pi \cap \pi'$ è parallela ad r.
3. Una retta ed un piano paralleli definiscono, mediante i rispettivi punti di intersezione con due rette parallele, due segmenti congruenti.
4. Se una retta e un piano sono paralleli i punti della retta sono equidistanti dal piano.

Tutto ciò giustifica la seguente definizione.

Definizione 5.3. Data una retta parallela a un piano, dicesi *distanza della retta dal piano*, la distanza di un punto qualunque della retta dal piano.

È ora naturale introdurre il concetto di piani paralleli.

Definizione 5.4. Due piani si dicono *paralleli* quando non hanno alcun punto in comune.

L'esistenza di piani paralleli è provata dal seguente:

Teorema 5.4. Se due rette, che si intersecano, sono parallele ad un piano, il piano che le contiene è parallelo a quello dato.

Conseguenze notevoli del precedente teorema sono:

1. Due piani perpendicolari ad una stessa retta, in punti distinti, sono paralleli.
2. Le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano sono rette parallele.
3. Se una retta interseca un piano, interseca pure ogni piano parallelo al primo.
4. Se due piani sono paralleli, ogni retta perpendicolare all'uno è perpendicolare anche all'altro.
5. Due piani paralleli ad un terzo sono paralleli fra loro.

6. Per un punto esterno ad un piano si può condurre un piano e uno solo, parallelo al piano dato.

7. Segmenti paralleli compresi fra piani paralleli sono congruenti.

8. Se due piani sono paralleli, le distanze di ciascun punto dell'uno dall'altro sono congruenti.

Tutto ciò giustifica le seguenti definizioni:

Definizione 5.5. Si chiama *distanza di due piani paralleli* la distanza di un punto di uno di essi dall'altro piano.

Definizione 5.6. L'insieme di tutti i piano dello spazio paralleli ad un piano dato si chiama *fascio di piani paralleli.*

Per distinguerlo dal fascio definito precedentemente, che chiameremo *fascio proprio*, chiameremo quest'ultimo *fascio improprio.* Una retta che interseca un piano di un fascio improprio interseca tutti gli altri e si chiama *trasversale del fascio.*

5.4 Diedri ed angoloidi

Definizione 5.7. Si chiama *fascio di semipiani* l'insieme di tutti i semipiani dello spazio che hanno l'origine a in comune; la retta a è l'asse del fascio.

Dato un fascio di piani (o di semipiani) si può immaginare che uno di questi ruoti intorno all'asse in due versi di rotazione tra loro opposti dei quali uno si sceglie come *positivo.* Per determinare il verso di rotazione si sceglie sull'asse un orientamento. Un fascio nel quale sia stato fissato il verso positivo si dice *orientato.*

Considerato un fascio orientato di semipiani e fissato in esso un semipiano α diremo che:

1. ogni altro semipiano del fascio segue il semipiano α

2. di due semipiani β e γ l'uno precede o segue l'altro qualora ruotando nel verso prescelto come positivo per ritornare su se stesso incontri prima β e poi γ

Premesso questo si possono dare le seguenti:

Definizione 5.8. Considerato un fascio orientato di semipiani, si chiama *angolo diedro* di due semipiani α e β l'insieme dei semipiani α e β e di quelli che, fissato il semipiano α, precedono β nel verso prescelto. Il semipiano α si chiama *prima faccia del diedro*e β è detto *seconda faccia*; l'asse del fascio si chiama *spigolo o costola* del diedro. Si chiama *diedro convesso* il diedro che non contiene, come semipiani interni, il prolungamento delle sue facce; *diedro concavo* quello che contiene i prolungamenti delle facce.

L'intersezione di un diedro con un piano perpendicolare allo spigolo è un angolo nel piano stesso, ed è detto *sezione normale del diedro*. Si dimostra che tutte le sezioni normali dei diedri sono congruenti. Pertanto esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei diedri e l'insieme degli angoli. Mediante tale corrispondenza è possibile usare per i diedri i concetti introdotti per gli angoli, come quelli di angolo retto e di confronto tra gli angoli.

Definizione 5.9. Due piani che formino quattro diedri congruenti si dicono *perpendicolari*.

Si hanno le proprietà

1. Se una retta del piano β è perpendicolare al piano α, i due piani sono perpendicolari.

2. Se due piani sono perpendicolari, qualunque retta appartenente ad uno di essi, perpendicolare alla loro intersezione, è pure perpendicolare all'altro piano.

Si suppongano date nello spazio tre o più semirette aventi la medesima origine e tali che, considerate in un certo ordine, ciascun piano determinato da due semirette consecutive lasci in uno stesso semispazio tutte le rimanenti. L'insieme formato dagli angoli delle coppie di semirette consecutive chiamasi *superficie piramidale convessa o superficie di angoli*. I punti dello spazio che non appartengono alla superficie e che si trovano nell'intersezione dei semispazi determinati da semirette consecutive e contenenti la superficie, si dicono *punti interni*.

Si chiama *angoloide convesso l'insieme formato da una superficie piramidale convessa e da tutti i suoi punti interni*.

Un angoloide ha tante facce quanti spigoli e si dice *angoloide triedro, tetraedro, pentaedro,ecc* a seconda del numero di facce.

Si noti che l'intersezione di un angoloide con un piano che tagli tutti gli spigoli e non passi per il vertice è un poligono.

Si dimostrano i seguenti enunciati:

1. Ogni faccia di un triedro è minore della somma delle altre due e maggiore della loro differenza.

2. Ogni faccia di un angoloide è minore della somma di tutte le altre.

3. La somma delle facce di un angoloide convesso è minore della somma di quattro angoli retti.

5.5 Poliedri

Si chiama *superficie poliedrica* l'insieme formato da più poligoni situati in piani diversi e disposti in modo che ciascun lato sia comune a due di essi e il piano contenente ognuno generi un semispazio contenente tutti gli altri. I punti dello spazio che non appartengono alla superficie e si trovano nell'intersezione di tutti i semispazi determinati dai poligoni e contenenti la superficie si dicono punti *interni.*

Si chiama *poliedro convesso la figura formata da una superficie poliedrica convessa chiusa e dai suoi punti interni.*

Un poliedro si dice *regolare* quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono pure congruenti fra loro. Dal fatto che la somma S delle facce di un angoloide è minore di un angolo giro si deduce che esistono al più cinque specie di poliedri regolari e sono: tetraedro regolare, ottaedro regolare, icosaedro regolare, esaedro regolare, pentadodecaesro regolare.

Si dimostra il *teorema di Eulero*: indicati con con f, v, s, rispettivamente il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli di una superficie poliedrica, vale la relazione: $f + v = s + 2$.

5.6 Prismi e piramidi

Siano date nello spazio un numero qualunque $n \geq 3$ di rette parallele tali che esista un ordinamento delle rette per cui

- tre di esse consecutive non appartengano ad uno stesso piano;

- il piano individuato da due consecutive lasci da una stessa parte tutte le altre.

L'insieme formato dalle strisce di piano determinate dalle coppie di rette consecutive si chiama *superficie prismatica convessa indefinita*; l'insieme formato da una superficie prismatica convessa indefinita e dai suoi punti interni si chiama *prisma convesso indefinito*.

Se α e β sono due piani paralleli, si dice *strato* con facce α e β l'intersezione del semispazio che ha origine in α e contiene β con il semispazio che origine in β e contiene α.

L'intersezione (non vuota) di uno strato con una prisma convesso indefinito prende il nome di *prisma*.

Un prisma si dice *regolare* se è *retto* (cioè se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi) e le sue basi sono poligoni regolari. Dicesi *altezza* del prisma la distanza delle due basi.

Un prisma le cui basi sono due parallelogrammi (come le facce laterali) si dice *parallelepipedo*; dicesi *parallelepipedo retto* quello i cui spigoli sono perpendicolari alla base e *parallelepipedo rettangolo* il parallelepipedo retto che ha per base un rettangolo.

Si consideri un piano α che incontri tutti gli spigoli di un angoloide convesso senza passare per il vertice O. La figura intersezione del semispazio che ha per origine α e contiene O con l'angoloide si chiama *piramide*.

5.7 Superficie e solidi di rotazione

Si consideri una curva g (detta *generatrice*) appartenente ad un semipiano α che ha origine in una retta a; se facciamo ruotare di un angolo giro il semipiano α intorno alla retta a, la curva g genera una superficie detta *superficie di rotazione o superficie rotonda*.

Se P è un punto qualunque di g si conduca la perpendicolare PO all'asse. Durante la rotazione il segmento OP rimane perpendicolare all'asse e P rimane alla stessa distanza dall'asse. Da ciò segue che ogni punto della generatrice g descrive una circonferenza che appartiene ad un piano perpendicolare all'asse di rotazione e il cui centro O sta sull'asse medesimo. Le circonferenze descritte dai singoli punti di g si dicono *paralleli della superficie*. Un piano passante per l'asse interseca la superficie secondo due generatrici simmetriche rispetto all'asse. La figura costituita da esse si chiama *meridiano della superficie*.

Si consideri una superficie S nel semipiano α; in una rotazione completa del semipiano S genera un insieme che è detto *solido di rotazione*.

Il seguente elenco descrive i principali solidi di rotazione.

- Se la generatrice è una retta parallela all'asse di rotazione e alla distanza r da a, l'insieme generato dalla rotazione di una tale retta si dice *superficie cilindrica*. Equivalentemente si può definire la superficie cilindrica come l'insieme dei punti dello spazio la cui distanza da una retta fissa è costante. I paralleli di una superficie cilindrica sono circonferenze congruenti aventi per raggio il raggio della superficie; i meridiani sono coppie di rette parallele equidistanti dall'asse.

  L'insieme formato da una superficie cilindrica e dai suoi punti interni si chiama *cilindro indefinito*. L'intersezione (non vuota) di uno strato con un cilindro indefinito si chiama *cilindro*.

- La superficie generata in una rotazione completa di una semiretta g avente l'origine O sull'asse di rotazione a e non perpendicolare a questo si chiama *superficie conica circolare*. I paralleli di una superficie conica sono circonferenze di raggio variabile; i meridiani sono coppie di semirette simmetriche rispetto all'asse.

  L'insieme formato da una superficie conica e dai suoi punti interni si chiama *cono indefinito*; L'intersezione (non vuota) di un cono indefinito e di un semispazio perpendicolare all'asse contenente il vertice del cono indefinito si chiama *cono*.

- La superficie generata da una retta g che ruota intorno ad un asse passante per una suo punto V (vertice) senza essergli perpendicolare si chiama *superficie conica circolare a due falde*.

  Se consideriamo le intersezioni di una superficie conica circolare a due falde con piani non passanti per il vertice V, queste sono curve, dette *sezioni coniche o coniche*. Si hanno tre casi: ellisse, iperbole, e parabola.

- La superficie generata da una semicirconferenza g in una rotazione completa attorno alla retta contenente il suo diametro si chiama *superficie sferica*. I meridiani sono circonferenze aventi il centro e il raggio della superficie.

  Si chiama *zona sferica* l'intersezione (non vuota) di una superficie sferica con uno strato.

5.8 Misura dell'area delle superficie dei solidi

Le superficie dei poliedri sono somme delle superficie dei poligoni che ne costituiscono le facce. Da questa considerazione si possono dedurre le seguenti formule per la misura dell'area A della superficie.

Prisma retto. Dati: p, la misura del perimetro di base, h, la misura dell'altezza, b, la misura dell'area della superficie di base, si ha

$$A = 2b + ph,$$

ove ph rappresenta la misura dell'area della superficie laterale.

Piramide retta. Dati: p, la misura del perimetro di base, a, la misura dell'apotema, b, la misura dell'area della superficie di base, si ha

$$A = b + \frac{1}{2}pa,$$

ove $1/2\, pa$ rappresenta la misura dell'area della superficie laterale.

Tronco di piramide retta. Dati: p, P la misura dei perimetri delle due basi, a, la misura dell'apotema, b, B le misure delle aree della superficie delle due basi, si ha

$$A = b + B + \frac{1}{2}(p + P)a,$$

ove $1/2\,(p+P)a$ rappresenta la misura dell'area della superficie laterale.

Ovviamente, il cubo ed il parallelepipedo sono particolari esempi di prismi retti.

Le misure di aree di superficie di rotazione si ottengono con un procedimento di passaggio al limite utilizzando successioni di superficie la cui area si misura con formule note (come il prisma o la piramide). Ad esempio, per calcolare la superficie di un cilindro si utilizza una successione di prismi inscritti nel cilindro, che hanno superficie di area strettamente minore di quella del cilindro. La successione si definisce in modo tale che ogni prisma abbia superficie maggiore del prisma precedente ma minore del prisma seguente. Si ottengono i seguenti risultati.

Cilindro. Dati: c, la circonferenza di base, h, l'altezza del cilindro, b, la misura dell'area della superficie di base, si ha

$$A = 2b + ch.$$

Si noti che $c = 2\pi r$, ove r è il raggio della circonferenza di base, e che $b = \pi r^2$.

Cono. Dati: c, la circonferenza di base, h, l'apotema del cono, b, la misura dell'area della superficie di base, si ha

$$A = b + \frac{1}{2}ca.$$

Si noti che $c = 2\pi r$, ove r è il raggio della circonferenza di base, e che $b = \pi r^2$.

Tronco di cono. Dati: c, C le circonferenze delle due basi, h, l'apotema del tronco di cono, b, B le misure dell'area della superficie delle due basi, si ha

$$A = b + B + \frac{1}{2}(c + C)a.$$

Si noti che $c = 2\pi r$ e $C = 2\pi R$, ove r, R sono i raggi delle due circonferenze di base, e che $b = \pi r^2$, $B = \pi r^2$.

Per la misura della superficie di una sfera, si procede in maniera diversa: si postula che la superficie di una zona sferica generata da un arco di circonferenza sia maggiore della superficie generata dalla rotazione di una poligonale inscritta nell'arco di circonferenza. Un procedimento di passaggio al limite fornisce i seguenti risultati.

Zona sferica. Dati: r, raggio dell'arco di circonferenza, h, altezza della zona sferica, si ha

$$A = 2\pi rh,$$

dove $2\pi r$ è la misura della circonferenza massima della zona.

Superficie sferica. Dato il raggio r dell'arco di circonferenza (che in questo caso è una semicirconferenza), ed essendo una superficie sferica equivalente ad una zona che ha per altezza il suo diametro $2r$, si ha

$$A = 2\pi r\, 2r = 4\pi r^2.$$

5.9 Misura dei volumi dei solidi

Il postulato fondamentale per la misura dei volumi è il **Principio di Cavalieri**: *se due solidi si possono disporre nello spazio (mediante traslazioni o rotazioni) in modo tale che le proprie sezioni rispetto a piani paralleli ad un piano fissato sono equivalenti, allora i solidi hanno lo stesso volume.*

Il principio di Cavalieri permette di stabilire, tra le altre, le seguenti importanti equivalenze:

1. Un prisma (non necessariamente retto) ha lo stesso volume di un parallelepipedo rettangolo e di un cilindro di base equivalente e di uguale altezza.

2. Piramidi e coni con basi equivalenti ed altezze uguali hanno lo stesso volume.

3. Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma di base equivalente ed uguale altezza.

Segue dalle precedenti equivalenze che il teorema fondamentale per la misura dei volumi è: *parallelepipedi rettangoli aventi basi equivalenti sono proporzionali alle rispettive altezze.* Da questo seguono le formule per il volume V dei principali solidi.

Parallelepipedo rettangolo. Date a, b, c, le misure dei tre spigoli del parallelepipedo, si ha

$$V = abc.$$

Prisma. Date: B, l'area della superficie di base, h, l'altezza, si ha

$$V = Bh.$$

Piramide. Date: B, l'area della superficie di base, h, l'altezza, si ha

$$V = \frac{1}{3}\,Bh.$$

Tronco di piramide. Date: B, b, le aree della superficie delle due basi, h, l'altezza, $h+j$, l'altezza della piramide da cui è stato ottenuto il tronco per sezione, si ha

$$V = \frac{1}{3}B(h+j) - \frac{1}{3}bj,$$

assumendo $B \geq b$. Si noti che tramite una similitudine si può ricavare j:

$$j = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

Cilindro. Date: B, l'area della superficie di base, h, l'altezza, si ha

$$V = Bh.$$

Si noti che $B = \pi r^2$, dove r è il raggio di base.

Cono. Date: B, l'area della superficie di base, h, l'altezza, si ha

$$V = \frac{1}{3}Bh.$$

Si noti che $B = \pi r^2$, dove r è il raggio di base.

Tronco di cono. Date: B, b, le aree della superficie delle due basi, h, l'altezza, $h + j$, l'altezza del cono da cui è stato ottenuto il tronco per sezione, si ha

$$V = \frac{1}{3}B(h + j) - \frac{1}{3}bj;$$

anche qui si ricava j e si ottiene la formula

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr),$$

dove R ed r sono i raggi delle due circonferenze di base.

Sfera. Si può dimostrare che la sfera ha lo stesso volume dell'*anticlessidra*. L'anticlessidra è il solido ottenuto dalla differenza di un cilindro (equilatero, di altezza uguale al diametro della base) circoscritto alla sfera e della *clessidra*. La clessidra, a sua volta, è il solido formato dall'unione di due coni aventi per basi le due basi del cilindro e vertici coincidenti nel punto medio dell'asse del cilindro. Pertanto, dato r, il raggio della sfera, si ha

$$V = \pi r^2\, 2r - 2\frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

6 Elementi di geometria analitica nel piano

In questo paragrafo si vuole introdurre il concetto di vettore libero, che ha suggerito la generalizzazione a spazi vettoriali astratti. È possibile introdurre un piano di vettori liberi a partire da un dato piano euclideo; in maniera del tutto analogo la costruzione si generalizza costruendo uno spazio di vettori liberi a partire da un dato spazio euclideo.

Nota 6.1. Lo studio di questa parte del documento è complementare all'ordinaria didattica della geometria analitica di base del piano euclideo, inclusa la retta. Lo studente può riferirsi ad un qualunque testo per le Scuole Superiori per quanto riguarda un'impostazione didattica tradizionale degli stessi argomenti. I test di ammissione sono formulati seguendo l'impostazione tradizionale e possono essere risolti in maniera tradizionale.

I Professori potrebbero trovare del materiale per una nuova impostazione della didattica della geometria analitica del piano euclideo.

Si consideri un piano euclideo π. Ogni segmento di estremi A e B individua due segmenti orientati AB e BA aventi orientazioni opposte; ciò è espresso scrivendo che

$$AB = -BA \quad \text{oppure} \quad \vec{AB} = -\vec{BA}.$$

Nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio introduciamo la seguente relazione di equivalenza[2], detta di *equipollenza*:

$$AB \sim CD \quad \Leftrightarrow \quad \text{i punti medi di } AD,\ BC \text{ coincidono.}$$

Segue che AB è parallelo a CD (che si denota $AB \parallel CD$) e $\|AB\| = \|CD\|$, dove $\|AB\|$ indica il *modulo* o la *lunghezza* del segmento AB. L'insieme di tutti i segmenti equipollenti ad un dato segmento orientato AB si indica con $[AB]$, oppure con $B - A$, o $\vec{AB}$, e si chiama *vettore* (libero).

Il vettore $\vec{u}$ individuato dal segmento orientato AB e da tutti quelli ad esso equipollenti (come CD) soddisfa l'uguaglianza $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{CD}$. Un segmento orientato AB, rappresentante un vettore $\vec{u}$, si dice *vettore* $\vec{u}$ *applicato in* A e si indica $(\vec{u}, A)$. Il vettore $\vec{u}$ determina una traslazione dello spazio, da cui la parola, che proviene dal latino *vehere* = trasportare.

$$A + \vec{u} = B \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = B - A = \vec{AB}.$$

[2]Una relazione di equivalenza è una relazione che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

I segmenti AA, BB, $\dots$, individuano il vettore nullo $\vec{0}$.

Un vettore non nullo è individuato dalla direzione, dal verso e dal modulo. Indichiamo con $\mathbf{V}_2$ l'insieme dei vettori liberi dello spazio e con π i punti dello spazio. Fissato un punto $O \in \pi$, ad ogni punto $P \in \pi$ si può associare un unico vettore $\vec{u} \in \mathbf{V}_2$, ponendo $\vec{u} = \vec{OP}$. Pertanto, fissato un sistema di coordinate cartesiane Oxy in π, questo induce un sistema di coordinate cartesiane, denotato con lo stesso simbolo Oxy, in $\mathbf{V}_2$ tale che, se $\vec{u} = \vec{OP}$, allora le coordinate di $\vec{u}$ sono uguali alle coordinate di P.

Lunghezza di un vettore. Sia Oxy un sistema di coordinate cartesiane in π (dunque in $\mathbf{V}_2$). Sia $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Per il teorema di Pitagora, la *lunghezza* di $\vec{v}$ è data da

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Se P, $Q \in \pi$, allora la *distanza* tra P e Q è data da

$$d(P,Q) \stackrel{\text{def}}{=} \|Q - P\|.$$

Somma di vettori. Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori. Si vuole definire l'operazione di somma tra vettori. Se si considerano i rappresentanti indicati $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - B$, poniamo

$$\vec{u} + \vec{v} = C - A$$

(che non dipende dai rappresentanti scelti). Si vede facilmente che $(\mathbf{V}_2, +)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro $\vec{0}$ e $-\vec{u} = A - B$ se $\vec{u} = B - A$. In altre parole, valgono le proprietà

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}, \qquad \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}.$$

Vale la seguente *disuguaglianza triangolare*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Si osservi che se consideriamo rappresentanti opportuni $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AD}$, allora $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$ è la diagonale del parallelogramma di lati AB e AD, in accordo con quanto si studia in Fisica.

Per definizione poniamo

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Se $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - A$, allora $\vec{u} - \vec{v} = B - C$.

Prodotto di un numero reale per un vettore. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbf{V_3}$. Vogliamo definire $\lambda\vec{u}$.

1. Se $\lambda = 0$, oppure $\vec{u} = \vec{0}$, poniamo $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.
2. Se $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, il vettore $\lambda\vec{u}$ ha direzione coincidente con $\vec{u}$, verso concorde con quello di $\vec{u}$ se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$, e inoltre
$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|.$$

Il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è detto *scalare*.

Valgono le seguenti proprietà immediate
$$\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}, \qquad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u},$$
$$(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}, \qquad 1\,\vec{u} = \vec{u}$$

Sia $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vettore. Si dice *versore* di $\vec{v}$ l'espressione
$$\operatorname{vers}\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}(v_1, v_2). \tag{6}$$

Il versore di $\vec{v}$ è caratterizzato dall'avere stessi direzione e verso di $\vec{v}$ ma modulo 1.

6.1 Prodotto scalare

Il *prodotto scalare* tra due vettori di $\mathbf{V}_3$ è l'applicazione
$$g\colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbb{R}, \quad g(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$$
così definita:
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u}=\vec{0} \text{ o } \vec{v}=\vec{0} \\ \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che, anche non conoscendo la trigonometria, si può assumere che il numero $\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}}$ sia definito come la lunghezza della proiezione di $\operatorname{vers}\vec{v}$ su $\operatorname{vers}\vec{u}$, o, equivalentemente (per note proprietà di geometria del piano), come la lunghezza della proiezione di $\operatorname{vers}\vec{u}$ su $\operatorname{vers}\vec{v}$.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà (la cui dimostrazione è lasciata al lettore):

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, commutatività (ovvia dalla definizione);
2. $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, omogeneità;
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, distributività;
4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}$.

Teorema 6.1. Siano $\vec{w} = (w_1, w_2)$ e $\vec{z} = (z_1, z_2)$ due versori. Allora

$$\cos \widehat{\vec{w}\vec{u}} = w_1 z_1 + w_2 z_2. \tag{7}$$

Dimostrazione. Si può dimostrare l'enunciato in un sistema di riferimento in cui $(w_1, w_2) = (1, 0)$. In tali coordinate risulta

$$w_1 z_1 + w_2 z_2 = z_1,$$

ma z_1 è la lunghezza della proiezione ortogonale del vettore $\vec{z}$ su $\vec{w}$, come si può vedere aiutandosi con una figura. Un qualunque cambiamento di coordinate che conservi le lunghezze conserverà anche il numero $\cos \widehat{\vec{w}\vec{u}}$ poiché tale numero può essere definito come una lunghezza. $\boxed{QED}$

Corollario 6.1. Siano $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{V}_2$. Allora

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2. \tag{8}$$

Come conseguenza dei precedenti enunciati si ha

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2, \qquad \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}. \tag{9}$$

Dunque, *conoscendo il prodotto scalare*, si può determinare la lunghezza di un vettore e l'angolo tra due vettori. Tutta la geometria euclidea si può dedurre dalla nozione di prodotto scalare, assumendo le (9) come *definizioni* di *modulo* e di *angolo* tra due vettori.

La retta. Siano $(x_0, y_0) \in \pi$ e $(a, b) \in \mathbf{V}_3 \setminus \{\vec{0}\}$. Allora si dice *retta* l'insieme r dei punti $P(x, y) \in \pi$ che soddisfano la relazione

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b).$$

Il vettore (a, b) si dice *vettore di direzione* di r. Si noti che il vettore di direzione è determinato a meno di una costante di proporzionalità (non nulla).

Per ottenere l'equazione cartesiana basta scrivere la precedente equazione in forma scalare:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \end{cases}$$

e quindi eliminare il parametro t. Se $a \neq 0$, detto m il coefficiente angolare di r si trova che $m = b/a$. Infatti, per quanto detto sopra, si può scrivere

$$(a, b) = a(1, m),$$

quindi i due vettori rappresentano la stessa direzione.

Il vantaggio di questa definizione è che si presentano in un unico modo tutte le forme dell'equazione della retta, che non è più necessario introdurre con una casistica. Inoltre le proprietà metriche si ricavano tutte dal prodotto scalare. Alcuni esempi illustreranno questo punto di vista.

Esempio 6.1. *Retta per due punti.* Siano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \in \pi$. Allora l'equazione della retta per A e B è

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(B - A) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Sia $r\colon \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ l'equazione cartesiana di una retta. Allora il vettore (α, β) dei coefficienti di x, y è perpendicolare al vettore di direzione della retta data, come si può facilmente vedere trovando una rappresentazione parametrica di r.

Esempio 6.2. *Retta per un punto dato parallela ad una retta data.* Sia $r\colon (x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$. Allora la retta passante per un punto (x_1, y_1) e parallela ad r è

$$s\colon (x, y) = (x_1, y_1) + t(a, b).$$

Supponiamo che $r\colon \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Allora la retta cercata è $s\colon \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$. Infatti questa retta è perpendicolare al vettore (α, β), che è perpendicolare alla retta r.

Esempio 6.3. *Retta per un punto dato perpendicolare ad una retta data.* Sia $r\colon (x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$. Allora la retta passante per un punto (x_1, y_1) e perpendicolare ad r è

$$s\colon (x, y) = (x_1, y_1) + t(b, -a).$$

Infatti, come si vede subito, $(a,b)\cdot(b,-a)=0$.

Supponiamo che $r\colon \alpha x+\beta y+\gamma=0$. Allora la retta cercata è $s\colon \beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0$. Infatti questa retta è perpendicolare al vettore $(\beta,-\alpha)$, che è perpendicolare al vettore (α,β), che è perpendicolare alla retta r.

Esempio 6.4. *Coefficiente angolare e trigonometria.* Sia $r\colon (x,y)=(x_0,y_0)+t(a,b)$. Si può sostituire al vettore (a,b) il suo versore (a',b'). Per ben note proprietà trigonometriche risulta

$$(a',b')=(\cos\varphi,\sin\varphi),$$

ove φ è l'angolo formato dal vettore (a,b) con l'asse delle x. Pertanto il coefficiente angolare m risulta determinato da

$$(\cos\varphi,\sin\varphi)=\cos\varphi(1,\operatorname{tg}\varphi)=\cos\varphi(1,m).$$

Le coniche. Si dice *conica* l'insieme delle soluzioni di un'equazione algebrica di secondo grado in due incognite x, y, del tipo

$$a_0+a_1x+a_2y+a_{1,1}x^2+a_{1,2}xy+a_{2,2}y^2.$$

Si dimostra che con una trasformazione di coordinate del tipo

$$\begin{cases} X=\cos\varphi x-\sin\varphi y+x_0,\\ Y=\sin\varphi x+\cos\varphi y+y_0,\end{cases}$$

che è una rotazione di un angolo φ seguita da una traslazione, è sempre possibile ricondurre l'equazione di una data conica ad una delle forme seguenti (*forme canoniche*):

$$\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \text{ellisse, se } 4a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2>0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 & \text{iperbole, se } 4a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2<0,\\ y=ax^2+bx+c & \text{parabola, se } 4a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2=0.\end{array}$$

Le coniche possono essere anche essere caratterizzate come luoghi geometrici come segue.

L'ellisse. Si dice *ellisse* l'insieme dei punti P del piano tali che la somma delle distanze da due punti fissi F_1, $F_2 \in \pi$, detti *fuochi*, sia uguale ad una costante assegnata $2a$.

Si scelgano coordinate tali che $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ e che i punti P di un'ellisse soddisfino

$$\|P\vec{F}_1\| + \|P\vec{F}_2\| = 2a, \qquad a \geq c.$$

La precedente relazione diventa

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

che elevando al quadrato dà

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

dove si può porre $b^2 = a^2 - c^2$. Si definisce *eccentricità* dell'ellisse la costante c/a.

Si noti che, quando $F_1 = F_2$, si ottiene una *circonferenza*, ossia l'insieme dei punti del piano che hanno distanza uguale ad una costante assegnata r. L'equazione di una circonferenza è di uno dei due tipi

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$
$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0.$$

L'iperbole. Si dice *iperbole* l'insieme dei punti P del piano tali che il valore assoluto della differenza tra le distanze da due punti fissi F_1, $F_2 \in \pi$, detti *fuochi*, sia uguale ad una costante assegnata $2a$.

Si scelgano coordinate tali che $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ e che i punti P di un'ellisse soddisfino

$$\Big| \|P\vec{F}_1\| - \|P\vec{F}_2\| \Big| = 2a, \qquad c \geq a.$$

La precedente relazione diventa

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Procedendo come nel caso dell'ellisse si ottengono le forme canoniche.

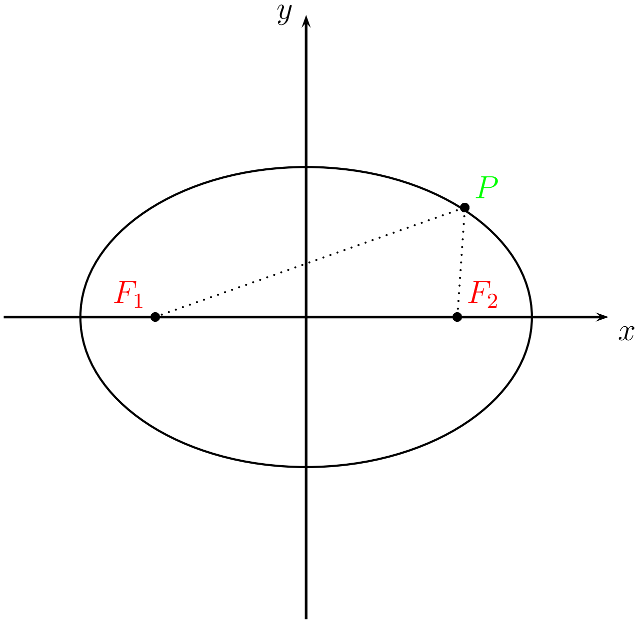

Figura 1: L'ellisse come luogo geometrico.

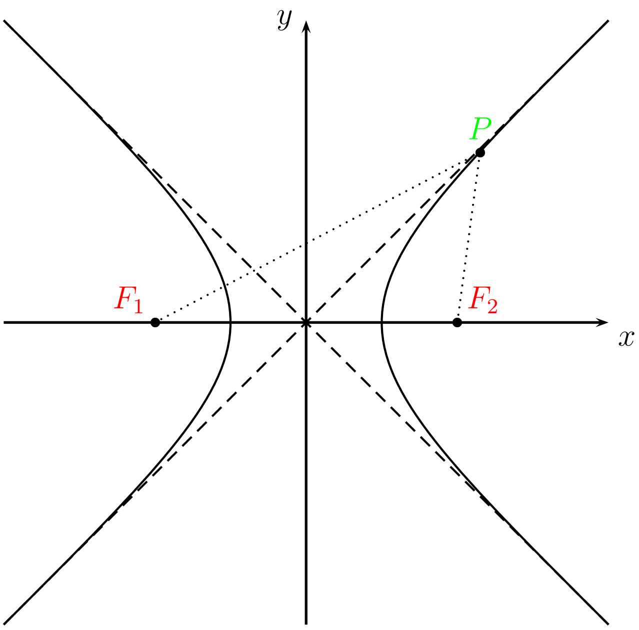

Figura 2: L'iperbole come luogo geometrico.

La parabola. Si dice *parabola* l'insieme dei punti P del piano che hanno distanze uguali da un punto fisso F, detto *fuoco*, e da una retta fissa d, detta *direttrice*.

Si scelgano coordinate tali che

$$d\colon y = -\frac{1}{4a},\ a \neq 0 \qquad F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$$

I punti $P = (x, y)$ della parabola soddisfano

$$\|\vec{PH}\| = \left|y + \frac{1}{4a}\right| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} = \left|y + \frac{1}{4a}\right|$$

Elevando al quadrato entrambi i membri dell'equazione precedente

$$y^2 + \frac{1}{16a^2} + \frac{y}{2a} = x^2 + y^2 + \frac{1}{16a^2} - \frac{y}{2a},$$

da cui otteniamo

$$y = ax^2$$

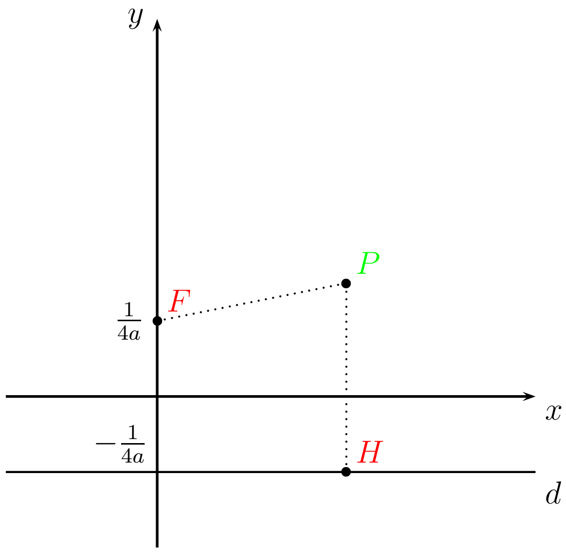

Figura 3: La parabola come luogo geometrico.

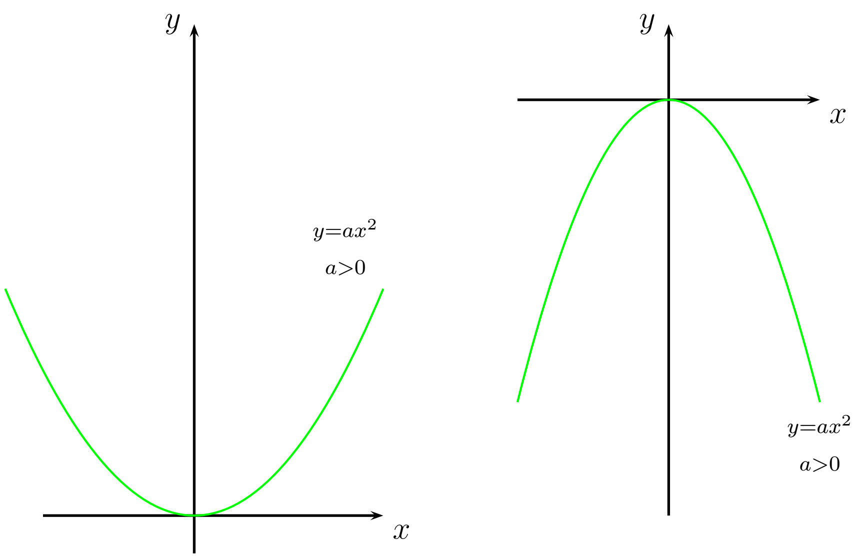

Figura 4: La concavità della parabola.

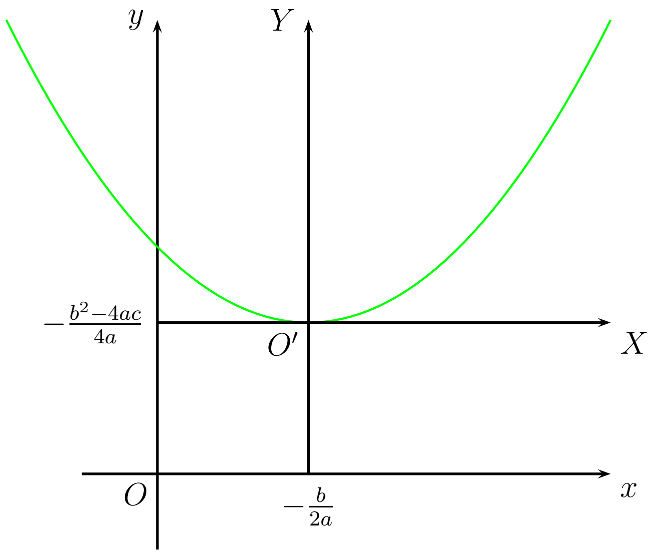

Figura 5: La parabola di eq. $y = ax^2 + by + c$.

7 Test di autovalutazione

In questo paragrafo sono riportati alcuni dei test di autovalutazione (assegnati dal 2000 al 2005) relativi alle conoscenze propedeutiche all'esame di Geometria e Algebra. Questi test sono stati preparati dai docenti di Geometria e Algebra della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Lecce per la seconda sessione dei test di autovalutazione, successiva ai corsi di recupero per gli studenti che non avessero superato il test di autovalutazione nella prima sessione.

7.1 Polinomi ed equazioni algebriche

Test 1. Il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \\ 2x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

ha

a. una sola soluzione.

b. nessuna soluzione.

c. tre soluzioni.

d. due soluzioni complesse coniugate.

e. infinite soluzioni.

Soluzione. b. Infatti, sommando il doppio della prima equazione alla terza equazione si ottiene una condizione impossibile. □

Test 2. L'espressione $(1 + \sqrt{x})^4$

a. è un polinomio di grado 4.

b. è un polinomio di grado 2.

c. è un polinomio di grado 3/2.

d. contiene termini di grado 3 in x.

e. non è un polinomio in x.

SOLUZIONE. e. Infatti il risultato è un'espressione algebrica contenente radicali. $\square$

Test 3. Il quoziente tra il polinomio $x^5+x^4+x^3-x$ e il polinomio x^2+x è

a. $-x^3+x-1$.

b. x^3+x-1.

c. x^4-4.

d. $x+4$.

e. x^2-x+1.

SOLUZIONE. b. Si ottiene effettuando la divisione euclidea, oppure procedendo per esclusione. Infatti, si ricorda che il quoziente deve avere grado uguale alla differenza tra i gradi dei polinomi dividendo e divisore, e coefficiente direttore uguale al rapporto tra i due coefficienti direttori corrispondenti. $\square$

Test 4. L'espressione $\sqrt{(x^2+y^2)^5}$ è uguale a

a. x^5+y^5.

b. $(x+y)^5$.

c. $(x^2+y^2)^3$.

d. $(x^2+y^2)\sqrt{x^3+y^3}$.

e. nessuna delle precedenti è vera.

SOLUZIONE. e. $\square$

Test 5. Dato il polinomio $x^3+k^3y^3$, dire per quali valori di k esso si decompone in fattori di primo grado.

a. $k=-1$.

b. $k=0$.

c. $k=1$.

d. Nessun valore di k.

e. Tutti i valori di k.

SOLUZIONE. $k = 0$. Infatti per k diverso da 0 il polinomio è la somma o la differenza di due cubi, ed il fattore di secondo grado della scomposizione non ha radici reali, pertanto non può essere scomposto ulteriormente. □

Test 6. Che 5 è radice doppia del polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ equivale a

a. $a5^3 + b5^2 + c5 + d = 0$

b. $a(2 \cdot 5^3) + b(2 \cdot 5^2) + c(2 \cdot 5) = 0$

c. $p(x) = (x - 5)^2(\alpha x + \beta)$ con $(5\alpha + \beta) \neq 0$

d. $p(x) = (x - 5)^2(\alpha x + \beta)$

e. nessuna delle risposte precedenti è esatta

SOLUZIONE. c. Infatti il polinomio deve essere divisibile due volte per $x - 5$, ed il quoziente non può essere ulteriormente divisibile. Per il teorema di Ruffini, ne segue che il quoziente non può annullarsi in $x = 5$. □

Test 7. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

dire quale delle seguenti equazioni aggiunta al sistema fornisce un sistema che ha un'unica soluzione.

a. $-x - y - z = -1$.

b. $2x - 2y - 2z = 4$.

c. $2x = 3$.

d. $y = 2$.

e. $2y + 2z = -1$.

SOLUZIONE. e. Infatti le prime due equazioni forniscono sistemi lineari con infinite soluzioni in quanto proporzionali ad una delle equazioni del sistema, l'ultima equazione è una differenza delle prime due e la terza porta ad un sistema che non ammette soluzioni. □

Test 8. $x = 1$ è soluzione dell'equazione $x^5 = 1$ con molteplicità

a. 5.

b. infinita.

c. 1.

d. non è soluzione.

e. nessuna delle precedenti è vera.

SOLUZIONE. c. Infatti scomponendo il polinomio $x^5 - 1$ si ottiene come fattore un polinomio di quarto grado che non si annulla in $x = 5$. □

Test 9. $\sqrt{2}$ è radice dell'equazione $x^3 - 2x^2 - x + h = 0$ se

a. $h = 4 + \sqrt{2}$.

b. $h = \sqrt{2} - 4$.

c. $h = 4 + 2\sqrt{2}$.

d. $h = 4 - \sqrt{2}$.

e. $h = 4 - 2\sqrt{2}$.

SOLUZIONE. d. Basta sostituire $\sqrt{2}$ nell'equazione data per ottenere il risultato. □

Test 10. Con quale tra le seguenti equazioni l'equazione $x - 2y = 5$ dà luogo ad un sistema lineare con infinite soluzioni

a. $3x + 3y = 1$.

b. $y - 2x = 5$.

c. $x - 2y = -5$.

d. $x - 4y = 25$.

e. $\sqrt{5}x - \sqrt{20}y = \sqrt{125}$.

SOLUZIONE. e. Infatti questa è l'unica tra le equazioni proposte ad essere proporzionale all'equazione data. □

7.2 Geometria del piano e dello spazio euclideo

Test 11. Il volume V di un tetraedro di vertici A, B, C, D ed il volume V' di un parallelepipedo avente i segmenti AB, AC, AD come spigoli uscenti da A, sono legati dalla relazione

a. V=1/3 V'

b. V=2/3 V'

c. V=1/6 V'

d. V=1/4 V'

e. nessuna delle risposte precedenti è esatta

SOLUZIONE. a. Direttamente dalla teoria, è una conseguenza del principio di Cavalieri. □

Test 12. Nel piano cartesiano il simmetrico P' del punto $P(x, y)$ rispetto alla retta $y = -x$ è

a. $P'(-x, y)$.

b. $P'(y, -x)$.

c. $P'(-y, x)$.

d. $P'(-y, -x)$.

e. $P'(0, 0)$.

SOLUZIONE. d. Infatti il punto simmetrico P' deve essere tale che il segmento PP' è perpendicolare ad $y = -x$ nel suo punto medio. Tale punto medio è $(P + P')/2 = ((x - y)/2, (y - x)/2)$, appartiene alla retta data ed il vettore $P - P'$ è perpendicolare al vettore $(1, -1)$, direzione della retta data. □

Test 13. Dati due punti (distinti) N e S nello spazio, quante sono le sfere che hanno N e S come punti antipodali?

a. nessuna

b. una sola

c. due

d. quattro

e. infinite

SOLUZIONE. b. Il centro della sfera deve coincidere col punto medio del segmento NS. □

Test 14. Nello spazio ordinario si considerino le rette r ed s incidenti ed ortogonali. Allora

a. ogni piano per s è parallelo ad r

b. esistono infiniti piani per s e perpendicolari ad r

c. esiste un solo piano per s e perpendicolare ad r

d. tutti i piani per r sono perpendicolari ad s

e. nessuna delle precedenti è vera

SOLUZIONE. c. Infatti esiste un solo piano passante per un punto dato della retta s (diverso dal punto d'incidenza con r) e perpendicolare alla retta data. Tale piano contiene anche gli altri punti della retta s poiché ne contiene due punti non coincidenti. □

Test 15. Un triangolo rettangolo isoscele ha il perimetro di $3(2+\sqrt{2})$cm; allora l'ipotenusa è lunga

a. $\sqrt{2}$cm

b. $3\sqrt{2}$cm

c. 6cm

d. $2\sqrt{2}$cm

e. nessuna delle precedenti risposte è esatta

SOLUZIONE. b. Il risultato si ottiene dall'equazione $2x + \sqrt{2x^2} = 3(2 + \sqrt{2})$, con x lunghezza del lato del triangolo rettangolo isoscele. □

7.3 Geometria analitica nel piano

Test 16. Fissato nel piano un riferimento cartesiano, il luogo descritto da un punto $P(u^2, u^2)$, al variare di u nell'insieme dei numeri reali, è

a. una semiretta

b. una retta

c. una semicirconferenza

d. una circonferenza

e. nessuna delle risposte precedenti è esatta.

SOLUZIONE. a. Infatti le coordinate assumono tutti i valori reali positivi. □

Test 17. Dati una parabola ed un punto nel piano, si dica quale delle seguenti affermazioni è falsa.

a. Il punto può appartenere alla parabola.

b. Esiste un asintoto della parabola che passa per il punto dato.

c. Una retta per il punto può intersecare la parabola in due punti.

d. Una retta per il punto può intersecare la parabola in un punto.

e. Una retta per il punto può avere intersezione vuota con la parabola.

SOLUZIONE. b. Infatti la parabola non ha asintoti. □

Test 18. Date le rette nel piano $x + y - 1 = 0$, $y = 2x + 2$, dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. Le due rette sono incidenti.

b. Le due rette sono parallele.

c. Le due rette sono perpendicolari.

d. Il sistema delle equazioni delle due rette non ha soluzioni.

e. I coefficienti angolari delle due rette sono gli stessi.

Soluzione. a. Basta risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due rette. □

Test 19. Dato un punto del piano ed un'ellisse, dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. Dal punto si possono condurre due tangenti distinte all'ellisse.

b. Dal punto si può condurre una retta tangente all'ellisse.

c. Dal punto non si può condurre nessuna retta tangente all'ellisse.

d. Dal punto si possono condurre infinite rette tangenti all'ellisse.

e. Nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

Soluzione. e. Infatti non è specificata la posizione del punto rispetto all'ellisse. □

Test 20. Data la retta del piano $y = 2x - 1$ ed il punto $P(2, -1)$ dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. La retta parallela ad r e passante per P è $y = -1/2\,x$.

b. La retta parallela ad r e passante per P è $y = 2x$.

c. La retta perpendicolare ad r e passante per P è $y = 2x + 2$.

d. La retta perpendicolare ad r e passante per P è $y = -1/2\,x$.

e. Nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

Soluzione. d. Il coefficiente angolare permette di escludere a e c, la retta $y = 2x$ non passa per P. □

Test 21. Data la famiglia di parabole di equazione $y = kx^2 + 2x - 3$, i valori di k per i quali le parabole intersecano l'asse x sono

a. qualsiasi valore di k.

b. $k \geq -1/3$.

c. $k \leq -1/3$.

d. $k = -1$.

e. nessun valore di k.

Soluzione. b. Nell'equazione $kx^2 + 2x - 3 = 0$ il discrimimante $\Delta = 1 + 3k$ deve essere maggiore o uguale a 0. □

Test 22. Voldendo rappresentare graficamente i punti della curva $x^2 + y^2 + 9 = 0$ su un foglio, il disegno sarà

a. un'ellisse.

b. un solo punto.

c. nessun punto.

d. una circonferenza.

e. un'iperbole.

Soluzione. c. La curva è una circonferenza di raggio negativo. □

Test 23. Il grafico della curva $x^2 - 4y^2 = 0$ è

a. una iperbole non degenere

b. una ellisse degenere

c. una coppia di rette distinte

d. un solo punto, l'origine

e. nessun punto

Soluzione. c. Basta scomporre il polinomio, che è la differenza di due quadrati. □

Riferimenti bibliografici

[1] C. Belingeri, F. Bongiorno, F. Rosati: Matematica -30, Aracne ed., prima ristampa, Roma 2005.

[2] N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi: Lineamenti di Algebra, vol. 1 e 2, Ghisetti e Corvi ed.

[3] N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi: Lineamenti di Analisi e Calcolo Combinatorio, Ghisetti e Corvi ed.

[4] N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi: Lineamenti di Geometria Analitica, Ghisetti e Corvi ed.

[5] N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi: Lineamenti di Geometria Razionale, vol. 1: geometria del piano, vol. 2: geometria dello spazio, Ghisetti e Corvi ed.

[6] G. Orecchia, S. Spataro: Corso Propedeutico di Matematica, Tecnos ed., Roma 1989.

[7] A. Sanini: Lezioni di Geometria, Levrotto & Bella ed., Torino 1993.