

INTERPRETAZIONE GRUPPALE DEGLI INTEGRALI
DI UN SISTEMA CANONICO (*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 3^a, vol. VIII, 2^o sem. 1899.

pp. 235-238

Il sig. MAURICE LÉVY ha per il primo osservato ⁽¹⁾ che, in una varietà qualunque, è possibile uno spostamento senza deformazione allora e solo allora che dal quadrato dell'elemento lineare si può, con acconcia trasformazione, far sparire una delle variabili. Ciò è quanto dire che esiste un integrale primo, lineare ed omogeneo, per le geodetiche della varietà.

Il prof. CERRUTI ritornò sull'argomento ⁽²⁾, trattando altresì il caso, in cui agiscono forze conservative. La relazione, di cui sopra è parola, fra integrali primi e spostamenti rigidi, si enuncia con linguaggio grup- pale nel modo seguente ⁽³⁾. Se la forza viva e il potenziale ammet- tono una stessa trasformazione puntuale infinitesima, le equazioni del moto posseggono un integrale primo lineare ed omogeneo; e reciproca- mente. (Il primo membro dell'integrale, scritto in forma canonica, coin- cide col simbolo della trasformazione infinitesima).

Sorge spontanea la domanda: Agli integrali non lineari corrisponde ancora qualche carattere grup- pale?

La risposta è affermativa e si applica senz'altro a qualsivoglia sistema canonico

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

(*) Presentata dal Socio V. CERRUTI nella seduta del 5 novembre 1899.

⁽¹⁾ « Comptes Rendus », t. LXXXVI, 18 febbraio e 8 aprile 1878.

⁽²⁾ In questi « Rendiconti », ser. 5^a, vol. III, 1895.

⁽³⁾ Cfr. le Note: *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso*, in questi « Rendiconti », ser. 5^a, vol. V, 1896 [in questo vol.: XI, pp. 253-267] e la elegante dimostrazione del sig. LIEB- MANN, « Math. Ann. », B. 50, 1897.

purchè non si considerino soltanto trasformazioni puntuali (rapporto alle variabili x , operanti per estensione sulle p), ma più generalmente trasformazioni di contatto nelle x, p . Si trova infatti che *integrali di un sistema canonico e trasformazioni di contatto nelle x, p , mutanti il sistema in sè, sono in sostanza la stessa cosa. Ad ogni integrale fa riscontro una trasformazione e inversamente. Le funzioni caratteristiche delle trasformazioni (fissando opportunamente un addendo, che rimane a priori indeterminato) si possono far coincidere coi primi membri dei corrispondenti integrali.*

Il teorema si dimostra in modo assai semplice. Sia

$$\delta f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \pi_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \dots + \pi_n \frac{\partial f}{\partial p_n}$$

una trasformazione infinitesima nelle x, p . Gli incrementi ξ, π si suppongano funzioni delle x , delle p e di un parametro t , invariabile di fronte alla trasformazione. Risguardando le x, p come funzioni di t , potremo estendere la δf alle singole derivate $dx_i/dt, dp_i/dt$, e i relativi incrementi si avranno dalle formule

$$\delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\delta x_i}{dt} = \frac{d\xi_i}{dt},$$

$$\delta \frac{dp_i}{dt} = \frac{d\delta p_i}{dt} = \frac{d\pi_i}{dt}.$$

Applicata al sistema (S), la trasformazione δf porge

$$(1) \quad \begin{cases} \delta \left\{ \frac{dx_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\} = 0 \\ \delta \left\{ \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \right\} = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Queste equazioni dovranno essere identicamente soddisfatte, in virtù delle (S), ogniqualvolta il sistema ammette la trasformazione infinitesima δf .

Introduciamo l'ipotesi che δf è trasformazione di contatto. Le ξ e le π sono derivate di una medesima funzione $W(x, p, t)$ (*), a norma delle

(*) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. II, cap. 14.

formule

$$(2) \quad \xi_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \pi_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i},$$

e il simbolo δf diventa la parentesi di POISSON (W, f) .

Le (1) si possono scrivere

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial p_i} - \left(W, \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial x_i} - \left(W, \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0,$$

ossia, eseguendo la derivazione e tenendo conto delle (S):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial p_i \partial t} + \left(H, \frac{\partial W}{\partial p_i} \right) - \left(W, \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} + \left(H, \frac{\partial W}{\partial x_i} \right) - \left(W, \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0,$$

che, per note proprietà delle parentesi, equivalgono a

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{\partial W}{\partial t} + (H, W) \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial W}{\partial t} + (H, W) \right] = 0. \end{cases}$$

Da queste apparisce che $\partial W / \partial t + (H, W)$ dipende dalla sola t . Ora W , funzione caratteristica della δf , è determinata dalle (2) a meno di una funzione additiva di t . Si può sempre disporre in modo che risulti identicamente

$$(1'') \quad \frac{\partial W}{\partial t} + (H, W) = 0.$$

È poi chiaro che dalla (1''), facendo cammino inverso, si ripassa alle (1).

La (1'') è dunque condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema canonico (S) ammetta la trasformazione infinitesima di contatto (W, f) .

D'altra parte la equazione stessa esprime precisamente che $W = \text{cost.}$ è integrale del sistema (S); di qua la proposizione enunciata.

Si noti che, allorché W è lineare e omogenea nelle p (e in questo caso soltanto), δf proviene dall'estensione di una trasformazione puntuale rapporto alle x . Segue da ciò che la esistenza di un integrale lineare, omogeneo, e quella di una trasformazione puntuale, mutante il sistema canonico in sè, sono due fatti concomitanti. Supponendo in particolare $H = T - U$, con T omogenea di secondo grado nelle p e U funzione delle sole x , si ritrova il teorema di LÉVY-CERRUTI. Risulta infatti dalla (1''), scindendo i termini di diverso grado nelle p , che separatamente T ed U ammettono la trasformazione W .

COMPLEM

È ben noto un numero ottiene ancora delle correfrazioni. Vengono infatti o non-normali finito di rifrazione una rifrazione

Gli indici eguali a -1 . Sono soddisfatte e il grado teoria delle e

Così, per rimane determinato, la con

Per le correfrangenti in ∞^1 raggi. rigate e i sin

1. - Designa di queste var

(1)

(*) Presentat