

Dottorato di Ricerca in Matematica  
Sede: Università di Firenze  
Università consorziate: Cagliari, Modena, Perugia, Siena

---

**BICOMPLESSI LAGRANGIANI  
ED APPLICAZIONI  
ALLA MECCANICA RELATIVISTICA  
CLASSICA E QUANTISTICA**

**Raffaele Vitolo**

Tesi di Dottorato in Matematica  
(VII ciclo: 1991–1995)  
28 febbraio 1996

Direttore della Ricerca  
Prof. Marco Modugno

Coordinatore del Dottorato  
Prof. Carlo Pucci

---

# PREFAZIONE

La tesi è uno studio delle strutture geometriche in meccanica classica e quantistica.

Nella prima parte, è sviluppata la teoria dei bicomplessi lagrangiani del primo ordine per varietà fibrato, per teorie lagrangiane della meccanica. La presentazione è originale per il suo carattere esplicitamente intrinseco; fra i risultati più importanti abbiamo gli isomorfismi dei fasci quozienti con fasci di sezioni di opportuni fibrati, la formulazione intrinseca del morfismo di Helmholtz e un'interpretazione, mediante il bicomplesso, degli oggetti geometrici della meccanica lagrangiana (lagrangiana, momento, forma di Poincaré–Cartan, forma dinamica, operatore e morfismo di Eulero–Lagrange, operatore e morfismo di Helmholtz).

La seconda parte è dedicata all'applicazione dei risultati della prima parte alle strutture geometriche della relatività galileiana, e ad una formulazione della relatività einsteiniana. Nel caso galileiano, le strutture geometriche forniscono un bicomplesso lagrangiano, mediante il quale è possibile rappresentare in un quadro sinottico gli oggetti geometrici della meccanica relativistica. È anche presente un primo esempio di soluzione esatta non piatta dello spazio–tempo galileiano, la soluzione a simmetria sferica. Per quanto riguarda la relatività generale einsteiniana, viene data particolare enfasi allo studio della geometria dello spazio delle fasi, in vista della formulazione delle strutture quantistiche relativistiche.

Nella terza parte vengono formulate le strutture quantistiche relativistiche, necessarie ad una formulazione covariante della meccanica quantistica, sia nel caso galileiano, sia nel caso einsteiniano. Inoltre, viene risolto il problema dell'esistenza della connessione quantistica, nel caso galileiano e nel caso einsteiniano, sfruttando tecniche di coomologia e la relazione fra la connessione quantistica e la forma di Poincaré–Cartan.

È molto importante osservare che il principio di relatività è alla base di tutte le applicazioni fisiche sviluppate nella tesi. Ciò è garantito dall'utilizzo costante di tecniche intrinseche di analisi su varietà.

I risultati sopra esposti aprono la strada a numerose possibilità di futuri sviluppi in campo matematico e fisico.

**Ringraziamenti.** Vorrei esprimere la mia riconoscenza al Prof. Marco Modugno per la sua costante e piena disponibilità nei miei confronti.

Sentiti ringraziamenti sono dovuti al Prof. D. Krupka per avermi invitato all'Università di Opava, e ai Professori P. L. García Pérez, D. Hernandez Ruipérez e A. Lopez Almorox per avermi invitato all'Università di Salamanca.

Ringrazio anche il Prof. I. Kolář per numerosi suggerimenti concernenti le teorie lagrangiane.

Desidero, infine, ringraziare gli amici Elena De Angelis, Veronica Gavagna, Paolo Morassi, Domenico Mucci, Raffaella Paoletti, Angelo Sonnino, Jaroslav Štefánek, Federico Talamucci, Carlos Tejero Prieto, Giuseppe Vecchioli, e i miei amici e coinquilini Claudio Comodi, Lorenzo Lolini e Fabio Rosignoli per le discussioni scientifiche ed il sostegno morale.

# INDICE

Introduzione	6
<b>Parte I: Bicomplessi lagrangiani</b>	<b>13</b>
<b>1 Bicomplessi lagrangiani per le varietà fibrato</b>	<b>14</b>
1.1 Fasci di forme sui getti . . . . .	14
1.1.a Fasci di forme sui getti . . . . .	14
1.1.b Decomposizione fondamentale . . . . .	16
1.1.c Differenziale orizzontale e verticale . . . . .	18
1.2 Bicomplessi lagrangiani . . . . .	19
1.2.a Sottosuccessione di contatto . . . . .	20
1.2.b Bicomplessi lagrangiani . . . . .	22
1.2.c Limite diretto . . . . .	24
1.2.d Confronto con altre teorie . . . . .	26
1.3 Successione lagrangiana del primo ordine . . . . .	30
1.3.a Morfismo di Eulero–Lagrange . . . . .	31
1.3.b Morfismo di Helmholtz . . . . .	36
1.4 Interpretazione meccanica . . . . .	42
1.4.a La colonna cinematica . . . . .	43
1.4.b La colonna dinamica . . . . .	45
1.4.c Le colonne cinematica e dinamica . . . . .	46
1.4.d Interpretazione meccanica del bicompleso lagrangiano . . . . .	47
<b>Parte II: Strutture relativistiche classiche</b>	<b>49</b>
<b>2 Strutture della relatività generale classica galileiana</b>	<b>50</b>
2.1 Spazio–tempo . . . . .	50
2.1.a Unità di misura . . . . .	50
2.1.b Spazio–tempo . . . . .	51
2.1.c Metrica verticale . . . . .	53
2.1.d Connessione spazio–temporale . . . . .	54
2.1.e 2–forma fondamentale . . . . .	60

2.1.f	Campo gravitazionale e campo elettromagnetico . . . . .	61
2.2	Equazioni dei campi . . . . .	64
2.2.a	Prima equazione dei campi . . . . .	64
2.2.b	Seconda equazione dei campi . . . . .	66
2.3	Meccanica delle particelle . . . . .	67
2.3.a	Oggetti indotti nella colonna dinamica . . . . .	69
2.3.b	Oggetti indotti nella colonna cinematica . . . . .	70
2.4	Soluzioni esatte newtoniane . . . . .	74
2.5	Soluzione esatta a simmetria sferica . . . . .	77
2.5.a	Spazio-tempo e metrica a simmetria sferica . . . . .	77
2.5.b	Connessione spazio-temporale asimmetria sferica . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Strutture relativistiche classiche einsteiniane</b>	<b>84</b>
3.1	Struttura geometrica dello spazio-tempo . . . . .	84
3.1.a	Unità di misura e spazio-tempo . . . . .	84
3.1.b	Spazio delle velocità . . . . .	85
3.1.c	Decomposizione ortogonale . . . . .	87
3.1.d	Fibrato verticale dello spazio delle velocità . . . . .	92
3.1.e	Connessioni . . . . .	93
3.1.f	2-forma fondamentale . . . . .	97
3.2	Campo gravitazionale e campo elettromagnetico . . . . .	99
3.3	Meccanica delle particelle e sviluppi futuri . . . . .	103
	<b>Parte III: Strutture relativistiche quantistiche</b>	<b>104</b>
<b>4</b>	<b>Connessione quantistica in relatività generale di Galilei</b>	<b>105</b>
4.1	Fibrato quantistico e connessione quantistica . . . . .	106
4.2	Esistenza di connessioni quantistiche . . . . .	110
4.3	Classificazione delle connessioni quantistiche . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Connessione quantistica in relatività generale einsteiniana</b>	<b>117</b>
5.1	Fibrato quantistico e connessione quantistica . . . . .	117
5.2	Esistenza di connessioni quantistiche . . . . .	120
5.3	Classificazione delle connessioni quantistiche . . . . .	121
	<b>Appendice</b>	<b>124</b>
A.1	Spazi di unità di misura . . . . .	124
A.2	Prodotto simmetrico di endomorfismi . . . . .	127
A.3	Fasci e coomologia . . . . .	127
A.3.a	Fasci . . . . .	127
A.3.b	Risoluzioni . . . . .	130
A.3.c	Teorie coomologiche: una breve introduzione . . . . .	132
A.3.d	Coomologia di Čech . . . . .	134

A.4	Coomologia di de Rham . . . . .	137
A.5	Isomorfismo coomologia di de Rham – coomologia di Čech . . . . .	138
A.6	Spazi di getti . . . . .	141
A.6.a	Spazi di getti di una varietà fibrata . . . . .	141
A.6.b	Spazi di getti di sottovarietà . . . . .	146
A.7	Connessioni . . . . .	148
A.7.a	Parentesi di Frölicher–Nijenhuis . . . . .	149
A.7.b	Connessioni . . . . .	150
A.7.c	Curvatura . . . . .	153
A.8	Principi variazionali . . . . .	155
A.9	Varietà riemanniane a simmetria sferica . . . . .	157

<b>Bibliografia</b>	<b>160</b>
---------------------	------------

# INTRODUZIONE

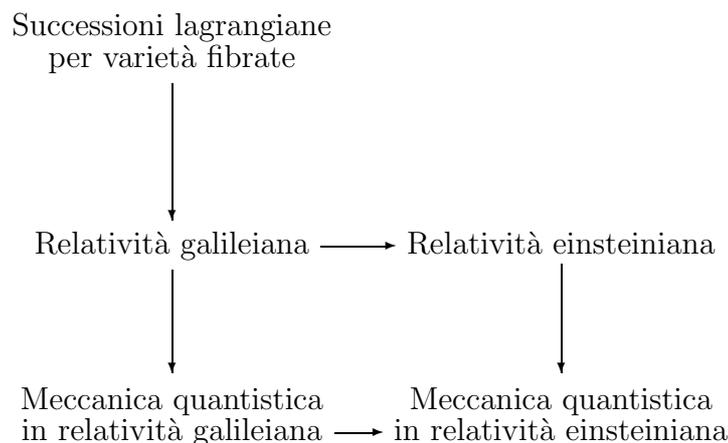
La tesi è divisa in tre parti interdipendenti, ciascuna dedicata ad uno dei soggetti principali, e cioè: un approccio geometrico alle teorie lagrangiane in meccanica, uno studio delle strutture geometriche delle teorie relativistiche galileiane e einsteiniane, con particolare riguardo all'applicazione del formalismo lagrangiano alla meccanica relativistica classica galileiana, e uno studio delle strutture relativistiche galileiane e einsteiniane della meccanica quantistica.

Nella prima parte della tesi vengono studiate le successioni lagrangiane originate dalla successione di de Rham sugli spazi di getti del primo ordine di una varietà fibrata, e viene confrontato l'approccio alle successioni lagrangiane su getti di ordine finito con l'approccio sui getti di ordine infinito.

Nella seconda parte della tesi è presa in esame una formulazione della teoria dei campi gravitazionale ed elettromagnetico in relatività galileiana classica ed in relatività einsteiniana classica. In particolare, i risultati della prima parte vengono applicati alla meccanica galileiana classica di una particella.

Nella terza parte della tesi sono presentate una formulazione della meccanica relativistica quantistica galileiana e una formulazione della meccanica relativistica quantistica einsteiniana, entrambe per il caso di una particella scalare. In particolare, viene analizzato in entrambi i casi il problema dell'esistenza delle strutture quantistiche.

Pertanto, la tesi può essere letta secondo lo schema seguente:



Le righe di questo diagramma corrispondono ad argomenti che vengono affrontati in modo analogo dal punto di vista matematico. Le colonne del diagramma corrispondono alle due teorie fisiche che vengono espone nella tesi.

Inoltre, la tesi contiene un capitolo di appendici che contengono alcuni fra i fondamenti matematici della tesi. Sono presentati argomenti che, in massima parte, non sono facilmente reperibili in letteratura, o sono dispersi in una grande varietà di pubblicazioni.

## Parte I: I bicomplessi lagrangiani

I primi approcci al problema della formulazione geometrica del calcolo delle variazioni risalgono ai primi anni settanta. Essi hanno come origine comune la versione geometrica del principio di minima azione di Hamilton, formulato su di una varietà fibrata. Si vedano, ad esempio, [Gar74, GoSt73, Kru73, Tul75], e, per ulteriori sviluppi, [Cos94, Cra81, CST85, Fer83, FeFr82, FeFr83, GaMu82, HoKo82, Kol83, Kru83, MaMo83b, Sau89].

La teoria dei bicomplessi lagrangiani è stata sviluppata alla fine degli anni settanta mediante contributi di parecchi autori [AnDu80, Bau82, DeTu80, OlSh78, Pom78, Tak79, Tul77, Vin77, Vin78]. L'obbiettivo fondamentale che questi lavori condividono consiste nella ricerca di una formulazione geometrica del calcolo delle variazioni senza fare uso degli integrali. Tutti i lavori producono come risultato un bicomplesso esatto, detto bicomplesso lagrangiano<sup>1</sup>, una riga del quale è la successione lagrangiana, che è costituita dai fasci delle lagrangiane, dei morfismi di Eulero–Lagrange, dei morfismi di Helmholtz, ecc., e i cui morfismi sono costituiti dall'operatore di Eulero–Lagrange, dall'operatore di Helmholtz, ecc.. Tutti questi lavori (eccetto una parte di [AnDu80]) fanno uso degli spazi di getti di ordine infinito di sezioni di una varietà fibrata ([AnDu80, OlSh78, Tak79, Tul77]) o di sottovarietà di dimensione fissata di una varietà ([Vin77], [Vin78]). Questo è dovuto al fatto che lo spazio tangente dei getti di ordine infinito possiede una decomposizione naturale in somma diretta, che facilita l'analisi.

Recentemente è stato presentato un approccio ai bicomplessi lagrangiani che fa uso di spazi di getti di ordine finito di sezioni di una varietà fibrata [Kru90]. Un bicomplesso lagrangiano di ordine finito è prodotto quotizzando la successione esatta di de Rham su uno spazio di getti di ordine finito mediante una sua sottosuccessione esatta naturale. Questa sottosuccessione è originata dalla struttura di contatto, che, a sua volta, viene in modo naturale dalla fibrazione. La successione quoziente, detta successione lagrangiana, è esatta, e contiene tutte le informazioni relative al calcolo delle variazioni: fra i fasci della successione si trovano il fascio delle lagrangiane, il fascio degli operatori di Eulero–Lagrange, e il fascio degli operatori di Helmholtz, e fra i morfismi della successione vi sono l'operatore di Eulero–Lagrange e l'operatore di Helmholtz.

Mentre l'approccio di ordine infinito fornisce una descrizione esauriente del formalismo lagrangiano da un punto di vista strutturale, l'approccio di ordine finito si rivela particolarmente utile nell'analisi di teorie lagrangiane concrete (ad esempio, la meccanica relativistica galileiana di una particella). Questo perché l'approccio di ordine infinito non mette in evidenza molte informazioni importanti legate all'ordine della teoria in esame.

D'altro canto, l'analisi di Krupka [Kru90, Kru95a, Kru95b], non è portata avanti utilizzando in modo esplicito tecniche intrinseche. Inoltre, manca completamente la descrizione

---

<sup>1</sup>L'uso di questo termine è preso da [Tul77], e sembra essere il più appropriato per motivi storici.

dell'approccio di ordine finito per quanto riguarda i getti di sottovarietà di dimensione fissata.

In questa tesi, i risultati concernenti i bicomplessi lagrangiani sono contenuti nel capitolo 1, e si occupano di due problematiche distinte.

Prima di tutto, è di fondamentale importanza un confronto tra le due formulazioni fondamentali dei bicomplessi, e cioè sui getti infiniti e sui getti finiti [Vit96a]. In particolare, si dimostra che il limite diretto del sistema formato dai bicomplessi lagrangiani di ordine finito dà luogo alla successione lagrangiana dell'approccio sui getti infiniti. Questo risultato è di particolare importanza in quanto stabilisce che la maggiore semplicità della costruzione sui getti di ordine finito non implica una perdita di informazioni rispetto al caso dei getti di ordine infinito.

Poi, vengono presi in esame i bicomplessi lagrangiani del primo ordine per teorie relativistiche della meccanica, ossia bicomplessi originati da una fibrazione con base di dimensione 1 [Vit95c, Vit95d]. Sono forniti in modo intrinseco isomorfismi di ciascun fascio quoziente della successione lagrangiana corta con un altro ben determinato fascio di forme su uno spazio di getti di ordine opportuno. Come conseguenza si ottiene che la successione lagrangiana del primo ordine include anche lagrangiane del secondo ordine affini e corrispondenti morfismi di Eulero–Lagrange del terzo ordine. Ciò è dovuto al fatto che il fascio delle lagrangiane è ottenuto tramite un passaggio al quoziente dal fascio delle 1–forme sullo spazio dei getti del primo ordine; in verità, un funzionale di azione può essere definito anche mediante una 1–forma qualunque sullo spazio dei getti del primo ordine, e non solamente dalle 1–forme orizzontali (si veda l'appendice A.8). Questa caratteristica è particolarmente importante in quanto la maggior parte delle lagrangiane del secondo ordine note in fisica sono affini. Inoltre, è fornita una caratterizzazione del morfismo di Helmholtz, mostrando che l'espressione in coordinate locali, ricavata in [Ton69] (si veda anche [LaTu77, Bau82, GiMa90, Kru90]) è intrinseca. Come conseguenza di ciò, viene trovato anche un nuovo oggetto geometrico intrinseco, che non ha ancora un significato fisico.

Nell'ultima sezione del capitolo 1 viene affrontato il problema di trovare decomposizioni naturali per le colonne del bicompleso lagrangiano del primo ordine; è nell'ambito della soluzione a tale problema che viene data un'interpretazione del bicompleso lagrangiano nell'ambito del formalismo lagrangiano per la meccanica. Inoltre, è recuperata la definizione della forma di Poincaré–Cartan, che qui viene introdotta in un modo che è suggerito dal problema inverso [MoVi95] (si veda il capitolo 2).

Una prospettiva di futuri sviluppi di questa ricerca è data dai bicomplessi lagrangiani sugli spazi dei getti del primo ordine di sottovarietà di tipo tempo di una varietà di Lorentz. Ci si aspetta di ottenere risultati analoghi a quelli del capitolo 1 in quanto gli spazi dei getti di sottovarietà di tipo tempo di una varietà di Lorentz posseggono strutture del tutto analoghe a quelle degli spazi dei getti di sezioni di una varietà fibrata con base di dimensione 1 (capitolo 3).

Gli strumenti matematici fondamentali usati in questa parte sono la teoria dei fasci e

la teoria dei getti. L'appendice contiene un sunto di tutto il materiale necessario (sezioni A.3 e A.6). Le sorgenti fondamentali sono [Bre67, GuRo65, Wel80] per quanto riguarda i fasci, e [Kup80, MaMo83a, JaMo95, Sau89] per quanto riguarda i getti. Inoltre, dal punto di vista del calcolo delle variazioni, sono state sfruttate tecniche intrinseche introdotte in [HoKo82, Kol83, Cos94].

## Parte II: Strutture relativistiche classiche

La relatività generale classica einsteiniana è una teoria che ha raggiunto formulazioni matematicamente sofisticate e soddisfacenti, e che possiede una indiscussa validità fisica nell'ambito dello studio dell'interazione gravitazionale [Fra88, FFR84, HaEl73, MTW70, SaWu76]. Una formulazione relativistica altrettanto soddisfacente della meccanica quantistica basata sullo spazio-tempo relativistico di Einstein è, pertanto, auspicabile.

Tuttavia, a causa delle difficoltà che presenta il raggiungimento di questo obiettivo, si è pensato di iniziare formulando una teoria relativistica della meccanica quantistica basata sullo spazio-tempo di Galilei. Infatti, questa teoria, sia pure fisicamente meno valida della teoria einsteiniana, presenta caratteristiche simili alla teoria einsteiniana evitandone alcune delle maggiori difficoltà. Questo ha permesso di apprendere numerosi fatti importanti, che hanno trovato applicazione in una formulazione della relatività einsteiniana, sviluppata in [JaMo95]. Tale formulazione presenta numerosi aspetti originali, soprattutto dovuti all'utilizzo degli spazi di getti di sottovarietà di tipo tempo. È auspicabile che ciò permetterà di formulare una teoria relativistica della meccanica quantistica nel caso einsteiniano, procedendo per analogia con il caso galileiano.

La relatività generale galileiana, insieme al corrispondente approccio alla meccanica quantistica, è stata sviluppata in molti modi differenti da un grande numero di studiosi; citiamo, fra i più significativi, [Car86, DBKP85, DuKü84, Duv93, Kuc80, Kün74a, Kün74b, Kün76, Kün84, LBLL73, Lev73, Pru92, Pru93, Tra63, Tra66].

Il capitolo 2 contiene una formulazione dettagliata e matematicamente rigorosa della relatività generale galileiana, così come è stata sviluppata in [JaMo93a] e [JaMo93b]. In questa formulazione, lo spazio-tempo è una varietà fibrata sul tempo assoluto (cioè, indipendente dall'osservatore). Le strutture geometriche presenti sullo spazio-tempo sono una metrica riemanniana verticale ed una connessione priva di torsione compatibile con la fibrazione. La connessione porta le informazioni relative ai campi gravitazionale ed elettromagnetico.

La prima equazione dei campi è espressa richiedendo la chiusura di una 2-forma co-simpletica [AbMa78, Arn76, LiMa87], indotta naturalmente dalla metrica e dalla connessione. Come conseguenza, la connessione è metrica, ma non è completamente determinata dalla metrica, poiché quest'ultima è degenera. La seconda equazione dei campi è espressa uguagliando il tensore di Ricci della connessione al tensore di energia-impulso. L'equazione per i moti delle particelle è espressa richiedendo che tali moti siano le geodetiche della connessione.

Un modo per comparare questa formulazione con la relatività generale einsteiniana è la ricerca di soluzioni esatte per il caso galileiano. Un primo esempio è fornito dalla soluzione piatta. Questo caso è stato investigato in [JaMo93a] e [JaMo93b], sulla base di [Mod71]. Questa soluzione è l'analogo galileiano dello spazio-tempo di Minkowski.

Un altro esempio è costituito dalla soluzione a simmetria sferica. Questa soluzione è stata trovata in [Vit95a], [Vit95b]. Il problema è stato risolto lavorando in analogia a quanto si conosceva già per la relatività einsteiniana. Infatti, nella teoria einsteiniana il teorema di Birkhoff dà l'unicità della soluzione di Schwarzschild sotto ipotesi di simmetria sferica date sulla metrica [HaEl73]. Nella teoria galileiana si richiede la simmetria sferica dello spazio-tempo e delle strutture geometriche correlate rispetto alla linea di universo di un moto fissato. Da un punto di vista intuitivo, si chiede che non ci siano nello spazio-tempo punti privilegiati (all'infuori dei punti della linea di universo fissata) o direzioni privilegiate.

Pertanto, le condizioni di simmetria sono espresse sulla metrica, mediante tecniche di geometria riemanniana sviluppate allo scopo (si veda l'appendice A.9), e sulla connessione, mediante richieste sulla traiettoria di particelle test. Ne segue la banalità topologica dello spazio-tempo, e l'esistenza e l'unicità di un campo gravitazionale sfericamente simmetrico, per il quale l'equazione del moto delle particelle viene ad essere la legge di gravitazione di Newton. Inoltre, si ottiene l'esistenza di un'unico osservatore rispetto al quale le traiettorie di particelle test sono sfericamente simmetriche.

Gli esempi precedenti provano il notevole valore euristico della relatività galileiana. Infatti, essi dimostrano che approssimando la teoria einsteiniana con la teoria galileiana si ottengono nel caso galileiano soluzioni esatte che approssimano le soluzioni esatte einsteiniane ricavate mediante ipotesi del tutto analoghe. Questo può suggerire una rivisitazione del concetto di limite newtoniano [Ehl89].

La meccanica delle particelle in relatività galileiana trova un'interpretazione sorprendentemente chiara in termini del bicompleso lagrangiano sullo spazio dei getti del primo ordine di sezioni della fibrazione dello spazio-tempo sul tempo assoluto, ottenuta in [MoVi95]. Infatti, la forma cosimplettica ha una collocazione ben precisa all'interno del bicompleso. Essa si decompone in modo intrinseco nella somma di un operatore di Eulero-Lagrange del secondo ordine e di una 2-forma di contatto. Inoltre, la ricerca dei potenziali locali della forma cosimplettica produce le forme (locali) di Poincaré-Cartan, le Lagrangiane (locali) e i momenti (locali) correlati all'operatore di Eulero-Lagrange. Questi oggetti geometrici, benché definiti localmente, sono indipendenti dalla scelta di un osservatore.

È fondamentale notare che l'oggetto primitivo della teoria lagrangiana della meccanica relativistica galileiana è la forma cosimplettica, e non la lagrangiana. Questo approccio alla teoria lagrangiana della meccanica di una particella rovescia la prospettiva rispetto agli approcci tradizionali basati sulla lagrangiana, e pone l'accento sul problema inverso (sul quale esiste un'ampia letteratura [And86, AnTh92, Cra81, CPT84, Cra95, GMR81, LaTu77, MFLMR90, Olv86, Tho87, Ton69]). Ad esempio, il problema dell'unicità della forma di Poincaré-Cartan perde di significato in questo contesto. In verità, la struttura

dello spazio-tempo galileiano suggerisce che non è possibile formulare la teoria lagrangiana della meccanica relativistica galileiana partendo da una lagrangiana naturale.

Il capitolo 3 inizia con la formulazione della relatività generale einsteiniana, così come è stata data in [JaMo95] (tenendo conto anche della formulazione [Mod74]). Tale formulazione è basata sul fatto che gli oggetti geometrici che nascono dalla fibrazione nel caso galileiano hanno una controparte che è originata dalla metrica di Lorentz nel caso einsteiniano (si veda l'appendice A.6). La difficoltà maggiore di tale modo di procedere è dovuta al fatto che molti oggetti geometrici definiti sullo spazio-tempo nel caso galileiano vengono ad essere definiti sullo spazio dei getti di sottovarietà temporali nel caso einsteiniano.

L'analogo einsteiniano della struttura di contatto sugli spazi di getti di sezioni di una fibrazione permette di introdurre nel caso einsteiniano una 2-forma di contatto, che gioca un ruolo analogo a quello della 2-forma cosimplettica nelle teorie galileiane. Ci si aspetta di ottenere, pertanto, risultati analoghi a quanto provato per la meccanica relativistica classica galileiana mediante l'utilizzo del bicomplesso lagrangiano sullo spazio dei getti del primo ordine di sottovarietà temporali.

Una caratteristica particolarmente interessante di entrambe le formulazioni è l'utilizzo degli spazi di unità di misura (si veda l'appendice A.1). Questo dà luogo ad alcuni vantaggi essenziali: si prova esplicitamente l'indipendenza della teoria dalle scale, ad ogni passo è possibile rendersi conto delle dimensioni fisiche di un oggetto geometrico, sono immediatamente evidenti gli accoppiamenti possibili e quale tipo di costante di accoppiamento sia utilizzabile allo scopo.

### Parte III: Strutture relativistiche quantistiche

Questa parte della tesi è dedicata ad uno studio delle strutture relativistiche quantistiche basate sullo spazio-tempo galileiano ed einsteiniano, secondo il programma esposto all'inizio della precedente sezione.

Il capitolo 4 inizia con una formulazione della teoria quantistica galileiana per una particella senza spin [JaMo93a, JaMo93b]. Tale teoria è stata successivamente estesa al caso di una particella con spin in [CJM95].

La meccanica quantistica relativistica galileiana di una particella senza spin è formulata assumendo l'esistenza di un fibrato vettoriale di linea complesso hermitiano, basato sullo spazio-tempo, le cui sezioni rappresentano le storie quantistiche. Si assume, inoltre, l'esistenza di una connessione universale (si veda l'appendice A.6) hermitiana tale che la sua curvatura sia proporzionale alla 2-forma cosimplettica.

Come è stato provato in [MoVi95], localmente il dato della connessione quantistica è equivalente al dato di una forma di Poincaré–Cartan. Il problema globale dell'esistenza di una connessione quantistica è un problema di carattere topologico, ed è risolto da un teorema, del genere del teorema di Kostant–Soriau [Gar79, Kos70], che stabilisce una condizione necessaria e sufficiente di tipo coomologico sullo spazio-tempo e sulla forma

cosimplettica. Inoltre, sono classificate tutte le strutture quantistiche non isomorfe che esistono su un dato spazio-tempo relativistico galileiano [Vit96b].

Si dimostra in [JaMo93a, JaMo93b], che la connessione quantistica produce in modo naturale una lagrangiana, la quale dà luogo ad un morfismo di Eulero–Lagrange che è una generalizzazione dell’equazione di Schroedinger. Mediante la 2–forma cosimplettica è possibile anche definire un’algebra di Poisson di funzioni, che rappresentano gli osservabili classici; la connessione quantistica permette di ottenere gli operatori quantistici, realizzando pienamente il principio di corrispondenza. Questi ultimi aspetti, benchè fondamentali, sono solo brevemente citati nella tesi.

Infine, vengono studiate le strutture quantistiche nel caso dei due esempi concreti di spazio-tempo galileiano, la soluzione piatta e la soluzione sfericamente simmetrica, provando che in entrambi i casi tutte le possibili strutture quantistiche sono fra loro isomorfe.

Il capitolo 5 è portato avanti per analogia con il caso galileiano [Vit96b]. L’idea è di ripetere, nel caso einsteiniano, quanto è stato fatto per il caso galileiano, usando gli oggetti geometrici corrispondenti che sono stati introdotti nel capitolo 3. I risultati sulla condizione di esistenza per strutture quantistiche e sulla classificazione di tali strutture sono gli stessi del caso galileiano, poiché il problema matematico di base (si veda [Gar79, Kos70, Wel80]) è sostanzialmente lo stesso. Tuttavia, ciò porta ad un interessante studio della quantizzabilità di soluzioni esatte in relatività generale einsteiniana (spazio-tempo di Schwarzschild, spazio-tempo di Minkowski, monopolo di Dirac, ... [Vit96b]), che è tuttora in fase di approfondimento.

## Preliminari matematici

In questa tesi, le varietà sono connesse, soddisfano il secondo assioma di numerabilità, e sono  $C^\infty$ ; le mappe fra varietà sono  $C^\infty$ . Per quanto riguarda la teoria dei fibrati, si seguono le convenzioni di [CCKM90], e i testi [KoNo63, Ste51] verranno impiegati come riferimento. È opportuno ricordare che una varietà fibrata è per definizione una sommersione suriettiva fra due varietà, e che un fibrato è per definizione una varietà fibrata localmente banale [CCKM90, Ste51]. Con il termine morfismo fra varietà fibrate sulla stessa base è indicato un morfismo sull’identità della base, a meno che non sia diversamente specificato.

Per quanto riguarda i fasci, si useranno le definizioni e i risultati principali contenuti in [Wel80], che sono riepilogati nell’Appendice A.3. In particolare, i fasci di cui tratta la tesi sono fasci di spazi vettoriali reali, pertanto il termine ‘morfismo di fasci’ indicherà un morfismo di fasci di spazi vettoriali reali.

**PARTE I**  
**BICOMPLESSI LAGRANGIANI**

## CAPITOLO 1

# BICOMPLESSI LAGRANGIANI PER LE VARIETÀ FIBRATE

In questo capitolo è sviluppata la teoria dei bicomplessi lagrangiani per le varietà fibrate con base di dimensione 1. Il capitolo è basato su ricerche presentate in [MoVi95, Vit95c, Vit95d, Vit96a].

La teoria è sviluppata in modo naturale a partire da una varietà fibrata  $\pi : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ , con  $\dim \mathbf{X} = 1$  e  $\dim \mathbf{Y} = m + 1$ .

Verranno usate le notazioni dell'appendice A.6; in particolare, essendo  $\dim \mathbf{X} = 1$ , una carta fibrata verrà indicata con  $(x^0, y^i)$ , dove  $x^0$  indicherà la coordinata sulla base.

### 1.1 Fasci di forme sui getti

In questa sezione sono studiati i fasci di forme sui getti (vedere l'appendice A.6). In particolare, vengono presi in esame alcuni sottofasci naturali dei fasci di forme su  $J_r \mathbf{Y}$ , originati dalla fibrazione e dalla struttura di contatto. Alcuni di questi fasci possiedono una decomposizione canonica che è di utilità fondamentale nella tesi. Infine, verranno introdotti gli operatori differenziali  $d_h$  e  $d_v$  [Sau89], ponendoli in relazione con le decomposizioni di cui sopra.

#### 1.1.a Fasci di forme sui getti

Qui vengono introdotti i fasci di forme su  $J_r \mathbf{Y}$  che saranno oggetto di studio nelle prossime sezioni. Sia  $0 \leq k$ .

1. Prima di tutto, per  $0 \leq r$ , si indica con  $\Lambda_r^k$  il fascio delle  $k$ -forme locali su  $J_r \mathbf{Y}$

$$\alpha : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow \wedge^k T^* J_r \mathbf{Y} .$$

2. Poi, per  $0 \leq s \leq r$ , si indica con  $\mathcal{H}_{(r,s)}^k$  e  $\mathcal{H}_r^k$  il fascio dei morfismi fibrati locali su  $J_r \mathbf{Y} \longrightarrow J_s \mathbf{Y}$  and  $J_r \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$  del tipo

$$\alpha : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow \wedge^k T^* J_s \mathbf{Y} \quad \text{e} \quad \beta : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow \wedge^k T^* \mathbf{X} ,$$

rispettivamente. Così,  $\alpha \in \mathcal{H}_{(r,s)}^k$  e  $\beta \in \mathcal{H}_r^1$  se e solo se le loro espressioni in coordinate sono del tipo

$$\alpha = \alpha_{i_1, \dots, i_{k-1} 0}^{p_1 \dots p_{k-1}} d_{p_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge d_{p_{k-1}}^{i_{k-1}} \wedge d^0 + \alpha_{i_1, \dots, i_k}^{p_1 \dots p_k} d_{p_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge d_{p_k}^{i_k}$$

$$\beta = \beta_0 d^0$$

in cui  $0 \leq |p_j| \leq s$ , e  $\alpha_{i_1, \dots, i_{k-1} 0}^{p_1 \dots p_{k-1}}, \alpha_{i_1, \dots, i_k}^{p_1 \dots p_k}, \beta_0 \in \Lambda_r^0$ .

Chiaramente  $\mathcal{H}_{(r,r)}^k = \Lambda_r^k$  e  $\mathcal{H}_r = 0$  for  $k > 1$ .

Se  $0 \leq q \leq r$ , allora le inclusioni (A.2) danno le inclusioni

$$\mathcal{H}_q^k \simeq \pi_q^{r*} \mathcal{H}_q^k \subset \mathcal{H}_r^k \subset \mathcal{H}_{(r,t)}^k \subset \mathcal{H}_{(r,s)}^k \subset \Lambda_r^k,$$

$$\Lambda_s^k \simeq \pi_s^{r*} \Lambda_s^k \subset \mathcal{H}_{(r,s)}^k \subset \Lambda_r^k.$$

Le inclusioni di cui sopra sono inclusioni proprie se  $t < s < r$  and  $q < r$ . Infatti, non tutte le sezioni di un fibrato pull-back (come  $J_r \mathbf{Y} \times_{J_s \mathbf{Y}} T^* J_s \mathbf{Y}$ ) sono il pull-back di qualche sezione del fibrato stesso.

3. Inoltre, è indicato con  $\mathcal{H}_r^A \subset \mathcal{H}_r^1$  il sottofascio dei morfismi fibrati locali  $\alpha \in \mathcal{H}_r^k$  tali che  $\alpha$  sia un morfismo di fibrato affine su  $J_{r-1} \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ . Così, in coordinate,  $\alpha \in \mathcal{H}_r^A$  se e solo se  $\alpha_0 : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$  è una mappa affine rispetto alla fibrazione affine  $J_r \mathbf{Y} \longrightarrow J_{r-1} \mathbf{Y}$  (vedere l'appendice A.6).
4. Per  $1 \leq s \leq r$ , si indica con  $\mathcal{C}_{(r,s)}^k \subset \mathcal{H}_{(r,s-1)}^k$  il sottofascio dei morfismi fibrati locali su  $J_r \mathbf{Y} \longrightarrow J_{s-1} \mathbf{Y}$  del tipo

$$\alpha : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow \wedge^k \text{im } \vartheta_s^* \subset \wedge^k T^* J_{s-1} \mathbf{Y}.$$

Per l'iniettività di  $\vartheta_s^*$ , il sottofascio  $\mathcal{C}_{(r,s)}^k$  viene ad essere il sottofascio dei morfismi fibrati locali  $\alpha \in \mathcal{H}_{(r,s-1)}^k$  che si fattorizzano come  $\alpha = \wedge^k \vartheta_s^* \circ \tilde{\alpha}$ , tramite la composizione

$$J_r \mathbf{Y} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} J_s \mathbf{Y} \times_{J_{s-1} \mathbf{Y}} \wedge^k V^* J_{s-1} \mathbf{Y} \xrightarrow{\wedge^k \vartheta_s} \wedge^k T^* J_{s-1} \mathbf{Y}.$$

Così,  $\alpha \in \mathcal{C}_{(r,s)}^k$  se e solo se la sua espressione in coordinate è del tipo

$$\alpha = \alpha_{\underline{i}}^{\underline{p}} \vartheta_{\underline{p}}^i \quad 0 \leq |\underline{p}| \leq s,$$

Con  $\alpha_i^p \in \Lambda_r^0$ . Si dice che  $\mathcal{C}_r := \mathcal{C}_{(r,r)}^k$  è il fascio delle  $k$ -forme di contatto di ordine  $r$ .

Se  $0 \leq t \leq s \leq r$ , allora si hanno le inclusioni (si veda (A.4) e (A.5))

$$\mathcal{C}_t^k \simeq \pi_t^{r*} \mathcal{C}_t^k \subset \mathcal{C}_{(r,t)}^k \subset \mathcal{C}_{(r,s)}^k \subset \mathcal{C}_r^k \subset \Lambda_r^k .$$

dove  $\pi_t^{r*} \mathcal{C}_t^k$  denota l'immagine di  $\mathcal{C}_t^k$  per mezzo del morfismo di fasci iniettivo  $\pi_t^{r*} : \Lambda_t^k \longrightarrow \Lambda_r^k$ .

5. Infine, è indicato con  $\mathcal{C}_{(r,s)}^A \subset \mathcal{C}_{(r,s)}^k$  il fascio dei morfismi fibrati locali  $\alpha \in \mathcal{C}_{(r,s)}^k$  tali che  $\tilde{\alpha}$  sia un morfismo di fibrato affine su  $J_{r-1}\mathbf{Y} \longrightarrow J_{s-1}\mathbf{Y}$ . Così, in coordinate,  $\alpha \in \mathcal{C}_{(r,s)}^A$  se e solo se  $\alpha_i^p : J_r\mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$  sono mappe affini rispetto alla fibrazione affine  $J_r\mathbf{Y} \longrightarrow J_{r-1}\mathbf{Y}$  (vedere l'appendice A.6).

### 1.1.b Decomposizione fondamentale

Le mappe  $\mathfrak{d}_r$  e  $\vartheta_r$  (vedere l'appendice A.6) inducono due importanti derivazioni di grado 0 [Sau89], [Cos94]:

$$\begin{aligned} i_h : \Lambda_{r-1}^k &\longrightarrow \Lambda_r^k : \alpha \longmapsto i_h \alpha := i_{\mathfrak{d}_r} \lrcorner \alpha , \\ i_v : \Lambda_{r-1}^k &\longrightarrow \Lambda_r^k : \alpha \longmapsto i_v \alpha := i_{\vartheta_r} \lrcorner \alpha , \end{aligned}$$

dove la contrazione ha senso tenendo conto delle inclusioni naturali  $J_r\mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} T^*\mathbf{X} \subset T^*J_r\mathbf{Y}$  e  $VJ_r\mathbf{Y} \subset TJ_r\mathbf{Y}$ .

La decomposizione fibrata (A.8) dà luogo ad una decomposizione fondamentale.

**Lemma 1.1.1** *Si ha la decomposizione*

$$\mathcal{H}_{(r,r-1)}^1 = \mathcal{H}_r^1 \oplus \mathcal{C}_r^1 ,$$

in cui le proiezioni sul primo fattore e sul secondo fattore sono date, rispettivamente, da

$$\begin{aligned} h : \mathcal{H}_{(r,r-1)}^1 &\longrightarrow \mathcal{H}_r^1 : \alpha \longmapsto i_h \alpha , \\ v : \mathcal{H}_{(r,r-1)}^1 &\longrightarrow \mathcal{C}_r^1 : \alpha \longmapsto i_v \alpha . \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. È una conseguenza della decomposizione (A.8).  $\square$

Se  $\alpha \in \mathcal{H}_{(r,r-1)}^1$  ha l'espressione in coordinate  $\alpha = \alpha_0 d^0 + \alpha_i^p d_{\underline{p}}^i$  ( $\underline{p} \leq r$ ), allora

$$h(\alpha) = (\alpha_0 + y_{\underline{p}}^i \alpha_i^p) d^0 , \quad v(\alpha) = \alpha_i^p \vartheta_{\underline{p}}^i .$$

**Proposizione 1.1.1** *La decomposizione di  $\mathcal{H}_{(r,r-1)}^1$  del precedente Lemma induce la decomposizione*

$$\mathcal{H}_{(r,r-1)}^k = \left( \mathcal{C}_r^{k-1} \wedge \mathcal{H}_r^1 \right) \oplus \mathcal{C}_r^k ,$$

in cui le proiezioni sul primo fattore e sul secondo fattore sono date, rispettivamente, da

$$\begin{aligned} h : \mathcal{H}_{(r,r-1)}^k &\longrightarrow \mathcal{C}_r^{k-1} \wedge \mathcal{H}_r^1 : \alpha \longmapsto \frac{1}{(k-1)!} (\square^{k-1} \vartheta_r \square_{\mathcal{H}_r}) (\alpha) , \\ v : \mathcal{H}_{(r,r-1)}^k &\longrightarrow \mathcal{C}_r^k : \alpha \longmapsto \frac{1}{k!} \square^k \vartheta_r (\alpha) . \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda l'appendice A.2, e in particolare l'equazione (A.1), con  $\dim \mathbf{X} = 1$ . Si veda anche [Kru90].  $\square$

Ricordando l'espressione in coordinate di una sezione di  $\mathcal{H}_{(r,r-1)}^k$ , si ha

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(k-1)!} (\square^{k-1} \vartheta_r \square_{\mathcal{H}_r}) (d_{p_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge d_{p_{k-1}}^{i_{k-1}} \wedge d^0) \\ &= \vartheta_{r+1} \lrcorner d_{p_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta_{r+1} \lrcorner d_{p_{k-1}}^{i_{k-1}} \wedge \mathcal{H}_{r+1} \lrcorner d^0 \\ &= \vartheta_{p_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta_{p_{k-1}}^{i_{k-1}} \wedge d^0 \\ &\frac{1}{(k-1)!} (\square^{k-1} \vartheta_r \square_{\mathcal{H}_r}) (d_{p_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge d_{p_k}^{i_k}) = \sum_{l=1}^k y_{p_l}^{i_l} \vartheta_{p_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge d^0 \wedge \dots \wedge \vartheta_{p_k}^{i_k} \\ &\frac{1}{k!} \square^k \vartheta_r (d_{p_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge d_{p_{k-1}}^{i_{k-1}} \wedge d^0) = 0 \\ &\frac{1}{k!} \square^k \vartheta_r (d_{p_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge d_{p_k}^{i_k}) = \vartheta_{p_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta_{p_k}^{i_k} \quad \square \end{aligned}$$

La restrizione della decomposizione data sopra al fascio  $\Lambda_r^k$  avrà un ruolo fondamentale nell'analisi della sequenza lagrangiana (sezione 1.3).

**Corollario 1.1.1** *I morfismi di fasci  $h$  and  $v$  della proposizione precedente si restringono ai morfismi di fasci*

$$\begin{aligned} h : \Lambda_r &\longrightarrow \mathcal{C}_{r+1}^{k-1} \wedge \mathcal{H}_r^1 , \\ v : \Lambda_r &\longrightarrow \mathcal{C}_{r+1}^k ; \end{aligned}$$

inoltre,  $h$  è suriettivo.

DIMOSTRAZIONE. Le espressioni in coordinate che seguono la proposizione precedente implicano che le restrizioni di  $h$  e  $v$  di cui all'enunciato sono a valori nei fasci  $\mathcal{C}_{r+1}^{k-1} \wedge \mathcal{H}_r^1$  e  $\mathcal{C}_{r+1}^k$ .

Per mezzo di una partizione dell'unità si dimostra facilmente la suriettività di  $h$ .

$\square$

Si noti che il morfismo  $v$  del precedente corollario è suriettivo su di un sottofascio proprio, definito in modo intrinseco, di  $\mathcal{C}_{r+1}^k$ . Tuttavia, è la suriettività di  $h$  che giocherà un ruolo fondamentale nel seguito.

### 1.1.c Differenziale orizzontale e verticale

Le derivazioni  $i_h$ ,  $i_v$ , e il differenziale esterno  $d$  danno due derivazioni di grado 1 [Sau89], [Cos94]. Specificamente, il *differenziale orizzontale*  $d_h$  e il *differenziale verticale*  $d_v$  sono definiti come i morfismi di fasci

$$\begin{aligned} d_h &:= i_h \circ d - d \circ i_h : \Lambda_r^k \longrightarrow \Lambda_{r+1}^k, \\ d_v &:= i_v \circ d - d \circ i_v : \Lambda_r^k \longrightarrow \Lambda_{r+1}^k, \end{aligned}$$

Può essere provato [Sau89] che  $d_h$  e  $d_v$  soddisfano le proprietà

$$\begin{aligned} d_h^2 &= d_v^2 = 0, & d_h \circ d_v + d_v \circ d_h &= 0, \\ d_h + d_v &= (\pi_r^{r+1})^* \circ d, \\ (j_{r+1}s)^* \circ d_v &= 0, & d \circ (j_r s)^* &= (j_{r+1}s)^* \circ d_h. \end{aligned}$$

L'azione di  $d_h$  e  $d_v$  sulle funzioni  $f : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$  e sulle 1-forme di  $J_r \mathbf{Y}$  caratterizza univocamente  $d_h$  e  $d_v$ . Si hanno le espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} d_h f &= \pi_{r+10} \cdot f d^0 = (\partial_0 f + y_{p+1}^i \partial_i^p f) d^0, \\ d_h d^0 &= 0, & d_h d_{\underline{p}}^i &= -d_{\underline{p}+1}^i \wedge d^0, & d_h \vartheta_{\underline{p}}^i &= -\vartheta_{\underline{p}+1}^i \wedge d^0, \\ d_v f &= \partial_i^p f \vartheta_{\underline{p}}^i, \\ d_v d^0 &= 0, & d_v d_{\underline{p}}^i &= d_{\underline{p}+1}^i \wedge d^0, & d_v \vartheta_{\underline{p}}^i &= 0. \end{aligned}$$

Infine, la prossima proposizione analizza le relazioni di  $d_h$  e  $d_v$  con la decomposizione della proposizione 1.1.1.

**Proposizione 1.1.2** *Si ha*

$$\begin{aligned} d_h \left( \mathcal{C}_r \wedge \mathcal{H}_r \right) &= \{0\} & d_h \left( \mathcal{C}_r \right) &\subset \mathcal{C}_{r+1} \wedge \mathcal{H}_{r+1} \\ d_v \left( \mathcal{C}_r \wedge \mathcal{H}_r \right) &\subset \mathcal{C}_{r+1} \wedge \mathcal{H}_{r+1} & d_v \left( \mathcal{C}_r \right) &\subset \mathcal{C}_{r+1} . \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'azione di  $d_h$ ,  $d_v$  sulle funzioni e sulle basi coordinate locali delle forme.  $\square$

**Corollario 1.1.2** *Sia  $k > 0$ , e  $\alpha \in \Lambda_r^k$ . Allora*

$$\pi_r^{r+2*} d\alpha = d_v h(\alpha) + d_h v(\alpha) + d_v v(\alpha) ,$$

quindi

$$h(\pi_r^{r+2*} d\alpha) = d_v h(\alpha) + d_h v(\alpha) , \quad v(\pi_r^{r+2*} d\alpha) = d_v v(\alpha) .$$

## 1.2 Bicomplexi lagrangiani

In questa sezione viene richiamata la teoria dei bicomplexi lagrangiani su spazi di getti di ordine finito, così come è stata sviluppata da Krupka in [Kru90]. Lo scopo è di presentare un riassunto della teoria con la notazione sin qui introdotta.

Partendo dalla successione esatta di fasci di de Rham su  $J_r \mathbf{Y}$ , si trova una sottosuccessione naturale esatta. Questa sottosuccessione non è l'unica naturale ed esatta che si potrebbe considerare. La scelta di questa successione verrà effettuata dietro alcune considerazioni sul calcolo delle variazioni presentate nell'appendice A.8. Poi viene definita la successione lagrangiana di ordine  $r$  come il quoziente della successione di de Rham per mezzo della sottosuccessione esatta di cui sopra.

Si inizia considerando la successione esatta di fasci di de Rham su  $J_r \mathbf{Y}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Lambda_r^0 \xrightarrow{d} \Lambda_r^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda_r^{(r+1)m+1} \xrightarrow{d} 0 .$$

La fibra di  $J_r \mathbf{Y}$  su  $\mathbf{Y}$  è topologicamente banale; più precisamente,  $\mathbf{Y}$  è un retratto differenziabile di  $J_r \mathbf{Y}$ , quindi le coomologie di de Rham di  $\mathbf{Y}$  e  $J_r \mathbf{Y}$  sono isomorfe. Perciò, è auspicabile ridurre i fasci su  $J_r \mathbf{Y}$  a fasci su  $\mathbf{Y}$ . Ciò è possibile considerando su  $J_r \mathbf{Y}$  i fasci indotti dalla topologia dei tubi su  $J_r \mathbf{Y}$ , cioè la topologia generata da aperti ddel tipo  $(\pi_0^r)^{-1}(U)$ , con  $U \subset \mathbf{Y}$  aperto in  $\mathbf{Y}$ . Così, d'ora in poi, i fasci di forme su  $J_r \mathbf{Y}$  e i sottofasci relativi saranno considerati come fasci su  $\mathbf{Y}$  del tipo precedente.

### 1.2.a Sottosuccessione di contatto

Si possono fornire parecchi esempi di sottosuccessioni naturali della successione di de Rham. Per esempio, sottosuccessioni naturali della successione di de Rham nascono considerando gli ideali generati in  $\Lambda_r^k$  dai suoi sottofasci naturali  $\mathcal{H}_{(r,s)}^1, \mathcal{C}_{(r,s)}^1, \dots$  ( $0 \leq s \leq r$ ). Non tutte le sottosuccessioni naturali della successione di de Rham sono esatte. In questa sottosezione si studia una sottosuccessione naturale esatta della successione di de Rham, che risulta essere di particolare importanza nel calcolo delle variazioni, pur essendo definita indipendentemente (appendice A.8).

Si definisce, per induzione su  $k$

$$\Theta_r^0 := \{0\}, \quad \Theta_r^1 := \mathcal{C}_r^1, \quad \Theta_r^k := \mathcal{C}_r^k + d \mathcal{C}_r^{k-1}.$$

Qui,  $d \mathcal{C}_r^{k-1}$  denota l'immagine del differenziale esterno di forme su  $J_r \mathbf{Y}$  ristretto alle  $(k-1)$ -forme di contatto di ordine  $r$ . È chiaro che  $\Theta_r^k$  è un sottofascio di  $\Lambda_r^k$ . Così, la seguente sottosuccessione naturale

$$0 \longrightarrow \Theta_r^1 \xrightarrow{d} \Theta_r^2 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Theta_r^{m+1} \xrightarrow{d} 0$$

è detta *sottosuccessione di contatto* della successione di de Rham. Si noti che, in generale, i fasci  $\Theta_r^k$  non sono i fasci delle sezioni di un sottofibrato vettoriale di  $T^* J_r \mathbf{Y}$  (vedere il teorema A.3.1).

Il seguente lemma e la seguente proposizione sono equivalenti, e sono state provate indipendentemente in [AnTh92, p.15] e [Kru95a].

**Lemma 1.2.1** *Sia  $p \in \mathcal{C}_r^k$ . Allora si ha*

$$d_h p = 0 \Leftrightarrow p = 0$$

[AnTh92, p.15].

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, sia

$$p = p_{i_1, \dots, i_k}^{s_1, \dots, s_k} \vartheta_{s_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta_{s_k}^{i_k};$$

l'espressione in coordinate di  $p$ ; allora

$$d_h p = \mathbb{A}_{r+1} \alpha_{i_1, \dots, i_k}^{s_1, \dots, s_k} d^0 \wedge \vartheta_{s_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta_{s_k}^{i_k} + k \alpha_{i_1, \dots, i_k}^{s_1, \dots, s_k} d \vartheta_{s_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta_{s_k}^{i_k}.$$

Il risultato si ottiene per induzione su  $k$  e  $r$ .  $\square$

Si noti che un risultato simile non vale per  $d_v$ .

**Proposizione 1.2.1** *Per ogni  $k$ , i fasci  $\Theta_r^k$  sono la somma diretta su  $\mathbb{R}$  dei fasci  $\mathcal{C}_r^k$  and  $d\mathcal{C}_r^{k-1}$*

$$\Theta_r^k = \mathcal{C}_r^k \oplus d\mathcal{C}_r^{k-1}$$

[Kru95a].

DIMOSTRAZIONE. Siano  $\alpha \in \mathcal{C}_r^k$ ,  $\beta \in \mathcal{C}_r^{k-1}$ . Si deve dimostrare che

$$\alpha + d\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \beta = 0.$$

Ma  $\alpha + d\beta = 0$  implica  $d\alpha = 0$ , e quindi  $d_h\alpha = 0$  e  $d_v\alpha = 0$  per la proposizione 1.1.2. Il lemma precedente dà  $\alpha = 0$ , e, per un simile argomento,  $\beta = 0$ .  $\square$

**Teorema 1.2.1** *La sottosuccessione di contatto è esatta.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, sia  $c \in \Theta_r^k$ . Allora, esiste un'unica  $c_1 \in \mathcal{C}_r^k$  e un'unica  $c_2 \in \mathcal{C}_r^{k-1}$  tali che  $c = c_1 + dc_2$ . Si supponga che  $dc = 0$ . Allora,  $dc_1 = 0$ , quindi  $c_1 = 0$ . Così,  $c = dc_2$ .  $\square$

**Osservazione 1.2.1** La dimostrazione precedente dà come sottoprodotto che il complesso di cocatene dato dagli spazi vettoriali di sezioni globali di  $\Theta_r^k$  ha coomologia banale.  $\square$

**Proposizione 1.2.2** *I fasci  $\Theta_r^k$  sono soft (appendice A.3).*

DIMOSTRAZIONE. Viene qui ripetuta la prova data in [Kru90] per convenienza al lettore, adattandola alle presenti notazioni.

I fasci  $\mathcal{C}_r^k$  sono soft poiché sono fasci di sezioni di un fibrato vettoriale. Si consideri la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \ker d \longrightarrow \mathcal{C}_r^1 \xrightarrow{d} \text{im } d \longrightarrow 0,$$

Dal lemma 1.2.1 si ha  $\ker d = 0$ , e questo è un fascio soft. Quindi  $\text{im } d = d\mathcal{C}_r^1$  è soft (appendice A.3) [Wel80]. Per induzione su  $k$ , l'uguaglianza  $\ker d = \text{im } d$  sulle  $k$ -forme, e l'esattezza della successione

$$0 \longrightarrow \ker d \longrightarrow \mathcal{C}_r^k \xrightarrow{d} \text{im } d \longrightarrow 0$$

si ottiene che ciascuno dei fasci  $d\mathcal{C}_r^k$  è soft.



**Definizione 1.2.1** Il precedente diagramma è detto *bicomplesso lagrangiano di ordine  $r$*  associato alla varietà fibrata  $\mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$  [Kru90].

La riga in basso del diagramma è detta *successione lagrangiana di ordine  $r$*  associata alla varietà fibrata  $\mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ .

La colonna delle 1-forme è detta *colonna cinematica*, la colonna delle 2-forme è detta *colonna dinamica*, e la colonna delle 3-forme è detta *colonna dell'integrabilità*.  $\square$

Si noti che questo bicomplesso è stato ottenuto in modo intrinseco, ma non è l'unico ottenibile in modo intrinseco. È stato ottenuto allo scopo di avere una successione esatta che porti le informazioni appropriate relativamente al calcolo delle variazioni.

**Proposizione 1.2.4** *I fasci  $\Lambda_r^k/\Theta_r^k$  sono soft [Kru90].*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, ogni colonna è una successione esatta corta di fasci in cui  $\Theta_r^k$  e  $\Lambda_r^k$  sono soft (appendice A.3).  $\square$

**Corollario 1.2.1** *La successione lagrangiana è una risoluzione soft del fascio costante  $\mathbb{R}$  su  $\mathbf{Y}$  [Kru90].*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, eccetto  $\mathbb{R}$ , ognuno dei fasci nella successione è soft, e questa è precisamente la definizione di risoluzione soft (appendice A.3).

$\square$ La conseguenza più importante del precedente corollario è la seguente. Si consideri il complesso di cocatene

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathbf{Y}} \longrightarrow \binom{0}{\Lambda_r}_{\mathbf{Y}} \xrightarrow{d} \binom{1}{\Lambda_r/\Theta_r}_{\mathbf{Y}} \xrightarrow{E_1} \dots \xrightarrow{d} \binom{(r+1)m+1}{\Lambda}_{\mathbf{Y}} \xrightarrow{d} 0$$

e si denoti con  $H_{VS}^k$  il gruppo di coomologia di ordine  $k$  del precedente complesso di cocatene.

**Corollario 1.2.2** [Kru90]. *Per ogni  $k \geq 0$  esiste un isomorfismo naturale*

$$H_{VS}^k \simeq H_{de\ Rham}^k \mathbf{Y} .$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, la successione lagrangiana è una risoluzione soft di  $\mathbb{R}$ , quindi la coomologia del fascio  $\mathbb{R}$  è naturalmente isomorfa alla coomologia del precedente complesso di cocatene. Inoltre, la successione di de Rham dà luogo ad un complesso di cocatene di sezioni globali, la cui coomologia è naturalmente isomorfa alla coomologia del fascio  $\mathbb{R}$  on  $\mathbf{Y}$ . Il risultato si ottiene per composizione dei due precedenti isomorfismi (si veda in appendice A.3 la descrizione di tali isomorfismi naturali).  $\square$

Quest'ultimo risultato è stato raggiunto in [AnDu80], [Tak79], [Tul80], [Vin77], [Vin78].

### 1.2.c Limite diretto

In questa sottosezione, sono analizzate le relazioni fra bicompleksi lagrangiani di ordini diversi. In particolare, si mostra che esiste una inclusione naturale del bicomplesso di ordine  $s > 0$  nel bicomplesso di ordine  $r$  per ogni  $r \geq s$ . Infine, si costruisce il limite diretto del sistema di bicompleksi.

Si ricordano gli isomorfismi naturali ( $0 \leq s \leq r$ )

$$\Theta_s^k \simeq \pi_s^{r*} \Theta_s^k, \quad \Lambda_s^k \simeq \pi_s^{r*} \Lambda_s^k, \quad \left( \Lambda_s^k / \Theta_s^k \right) \simeq \left( \pi_s^{r*} \Lambda_s^k / \pi_s^{r*} \Theta_s^k \right), \quad (1.1)$$

e le inclusioni naturali

$$\pi_s^{r*} \Theta_s^k \subset \Theta_r^k, \quad \pi_s^{r*} \Lambda_s^k \subset \Lambda_r^k$$

**Lemma 1.2.2** [Kru90]. *Sia  $s \leq r$ . Allora, le inclusioni precedenti inducono il morfismo di fasci iniettivo*

$$\chi_s^r : \left( \Lambda_s^k / \Theta_s^k \right) \longrightarrow \left( \Lambda_r^k / \Theta_r^k \right) : [\alpha] \longmapsto [\pi_s^{r*} \alpha].$$

DIMOSTRAZIONE. Il precedente morfismo  $\chi_s^r$  è ben definito, poiché

$$[\alpha] = [\beta] \Rightarrow [\pi_s^{r*} \alpha] = [\pi_s^{r*} \beta]$$

per via delle inclusioni precedenti.

Il morfismo è anche iniettivo, poiché, se  $\alpha \in \Lambda_s^k$  e  $\beta \in \Lambda_s^k$  sono tali che

$$[\pi_s^{r*} \alpha] = [\pi_s^{r*} \beta],$$

allora, essendo  $\pi_s^{r*}(\alpha - \beta) \in \pi_s^{r*} \Lambda_s^k$ , e essendo  $\pi_s^{r*}(\alpha - \beta)$  una forma di contatto, vale  $\pi_s^{r*}(\alpha - \beta) \in \pi_s^{r*} \Theta_s^k$ , quindi  $[\alpha] = [\beta]$ .  $\square$

**Osservazione 1.2.2** È chiaro che, se  $t \leq s \leq r$ , allora  $\chi_s^r \circ \chi_t^s = \chi_t^r$ .

Si hanno i diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_r^k & \xrightarrow{d} & \Lambda_r^{k+1} \\ \uparrow \pi_s^{r*} & & \uparrow \pi_s^{r*} \\ \Lambda_s^k & \xrightarrow{d} & \Lambda_s^{k+1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Theta_r^k & \xrightarrow{d} & \Theta_r^{k+1} \\ \uparrow \pi_s^{r*} & & \uparrow \pi_s^{r*} \\ \Theta_s^k & \xrightarrow{d} & \Theta_s^{k+1} \end{array}$$

da cui il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_r^k / \Theta_r^k & \xrightarrow{E_k} & \Lambda_r^{k+1} / \Theta_r^{k+1} \\ \uparrow \chi_s^r & & \uparrow \chi_s^r \\ \Lambda_s^k / \Theta_s^k & \xrightarrow{E_k} & \Lambda_s^{k+1} / \Theta_s^{k+1} \end{array}$$

Si possono riassumere i precedenti diagrammi commutativi stabilendo l'esistenza di un diagramma commutativo tridimensionale (non esatto), le cui fette bidimensionali sono i bicomplexi lagrangiani di ordine 1, 2, ...  $\square$

Tenendo conto della precedente osservazione, si definiscono i seguenti fasci su  $\mathbf{Y}$

$$\Theta^k := \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \Theta_r^k, \quad \Lambda^k := \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \Lambda_r^k.$$

Le unioni precedenti hanno senso, tenuto conto degli isomorfismi naturali (1.1). Si noti che i fasci definiti sopra coincidono con il limite diretto dei sistemi di fasci

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \Theta_r^k & \longrightarrow & \Theta_{r+1}^k & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & \Lambda_r^k & \longrightarrow & \Lambda_{r+1}^k & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

poiché le mappe di tali sistemi possono essere identificate con le mappe inclusione in virtù degli isomorfismi naturali (1.1) [Sau89]. Si può dimostrare facilmente che

$$\Lambda^k / \Theta^k = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \Lambda_r^k / \Theta_r^k.$$

Il differenziale esterno passa al limite diretto; più precisamente, per ogni  $k \geq 0$  si definisce un morfismo di fasci

$$d : \Lambda^k \longrightarrow \Lambda^{k+1} : \alpha \longmapsto d\alpha$$

ove, essendo  $\alpha \in \Lambda_r^k$  per qualche  $r$ ,  $d\alpha$  coincide col differenziale di  $\alpha$  su  $\Lambda_r^k$ . Analogamente, si definiscono le proiezioni  $h$  e  $v$ ; in particolare, si ha la decomposizione naturale

$$\Lambda^k = \mathcal{C}^{k-1} \wedge \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{C}^k,$$

in cui la prima e la seconda proiezione coincidono, rispettivamente, con  $h$  e  $v$ . Si definiscono in modo analogo a quanto fatto per  $d$  il differenziale orizzontale e il differenziale verticale. Si definisce, inoltre, un operatore

$$E_k : \left( \Lambda^k / \Theta^k \right) \longrightarrow \left( \Lambda^{k+1} / \Theta^{k+1} \right).$$

**Proposizione 1.2.5** *Il diagramma seguente*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Theta^1 & \xrightarrow{d} & \Theta^2 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \Theta^k & \xrightarrow{d} & \dots \\
 & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \Lambda^0 & \xrightarrow{d} & \Lambda^1 & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \Lambda^k & \xrightarrow{d} & \dots \\
 & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \Lambda^0 & \xrightarrow{E_0} & \Lambda^1/\Theta^1 & \xrightarrow{E_1} & \Lambda^2/\Theta^2 & \xrightarrow{E_2} & \dots & \xrightarrow{E_{r_m}} & \Lambda^k/\Theta^k & \xrightarrow{E_k} & \dots \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

*è commutativo, e le righe e le colonne sono esatte.*

**DIMOSTRAZIONE.** Dall'analogo risultato per i bicomplexi di ordine finito.  $\square$  Si noti che la mappa  $E_0$  coincide con il differenziale orizzontale  $d_h$ .

## 1.2.d Confronto con altre teorie

In questa sottosezione sarà esposta brevemente la teoria dei bicomplexi variazionali nella formulazione data da Tulczyjew [Tul75, Tul77, Tul80, Tul85, Sau89]. Tale formulazione produce una successione lagrangiana uguale a quella prodotta da Takens in [Tak79] con tecniche analoghe.

Il risultato di questo paragrafo, esposto anche in [Vit96a], è che la successione lagrangiana di Tulczyjew (e quindi anche la successione lagrangiana di Takens) sono isomorfe al limite diretto della successione lagrangiana di ordine  $r$ , ossia alla successione che costituisce la riga in basso del diagramma della proposizione 1.2.5.

È possibile introdurre una prima semplificazione dei fasci quoziente.

**Lemma 1.2.3** *La restrizione della proiezione*

$$h : \Lambda_r^k \longrightarrow \mathcal{C}_{r+1}^{k-1} \wedge \mathcal{H}_r^1$$

al fascio  $\Theta_r^k$  ha la forma

$$h : \Theta_r^k \longrightarrow d_h \mathcal{C}_r^{k-1} .$$

DIMOSTRAZIONE. Dalle proposizioni 1.1.2 e 1.2.1.  $\square$

**Proposizione 1.2.6** *La proiezione  $h$  induce l'isomorfismo naturale di fasci*

$$\left( \Lambda_r / \Theta_r \right) \longrightarrow \left( \mathcal{C}_{r+1}^{k-1} \wedge \mathcal{H}_r \right) / d_h \mathcal{C}_r^{k-1} : [\alpha] \longmapsto [h(\alpha)] .$$

DIMOSTRAZIONE. La mappa è ben definita, poiché se  $c + dp \in \Theta_r^k$ , allora

$$[h(\alpha + c + dp)] = [h(\alpha) + d_h p] = [h(\alpha)] .$$

Inoltre, la mappa è iniettiva, poiché se  $\alpha \in \Lambda_r^k$  e  $\alpha' \in \Lambda_r^k$ , allora

$$[h(\alpha)] = [h(\alpha')] \Rightarrow h(\alpha - \alpha') = d_h p ,$$

con  $p \in \mathcal{C}_r^{k-1}$ . Quindi, essendo  $\alpha - \alpha' = h(\alpha - \alpha') + v(\alpha - \alpha')$

$$\alpha - \alpha' = d_h p + v(\alpha - \alpha') .$$

Ora, si somma e si sottrae la sezione  $d_v p$  al membro di destra della precedente equazione

$$\alpha - \alpha' = dp + v(\alpha - \alpha') - d_v p ,$$

e calcolando la classe di  $\alpha - \alpha'$  nello spazio  $\Lambda_{r+1}^k / \Theta_{r+1}^k$  per mezzo del morfismo iniettivo  $\chi_r^{r+1}$  si ottiene  $[\alpha] = [\alpha']$ .

Infine, la mappa è suriettiva poiché  $h$  è suriettiva.  $\square$

**Osservazione 1.2.3** Malgrado l'apparente complessità del fascio quoziente  $\left( \mathcal{C}_{r+1}^{k-1} \wedge \mathcal{H}_r \right) / d_h \mathcal{C}_r^{k-1}$ , è notevole che questo è ottenuto come quoziente di sottofasci propri dei fasci  $\Lambda_r^k$  e  $\Theta_r^k$ . Quindi, la ricerca di un rappresentante naturale in ogni classe di equivalenza sarà semplificata considerevolmente.

Inoltre, si noti che l'isomorfismo della proposizione precedente vale per tutti gli  $r$ , permettendo generalizzazioni della procedura al bicomplesso lagrangiano di ordine  $r$ .  $\square$

**Osservazione 1.2.4** Sia  $0 \leq s \leq r$ . Allora, il morfismo iniettivo  $\chi_s^r$  induce il morfismo iniettivo

$$\left( \mathcal{C}_{s+1}^{k-1} \wedge \mathcal{H}_s \right) / d_h \mathcal{C}_s^{k-1} \longrightarrow \left( \mathcal{C}_{r+1}^{k-1} \wedge \mathcal{H}_r \right) / d_h \mathcal{C}_r^{k-1} . \quad \square$$

Pertanto, se si definiscono i fasci

$${}^1\mathcal{H} := \cup_{r \in \mathbb{N}} {}^1\mathcal{H}_r, \quad {}^k\mathcal{C} := \cup_{r \in \mathbb{N}} {}^{k-1}\mathcal{C}_r, \quad d_h {}^{k-1}\mathcal{C} := \cup_{r \in \mathbb{N}} d_h {}^{k-1}\mathcal{C}_r,$$

si può facilmente dimostrare che vale l'uguaglianza

$$\left( {}^{k-1}\mathcal{C} \wedge {}^1\mathcal{H} \right) / d_h {}^{k-1}\mathcal{C} = \cup_{r \in \mathbb{N}} \left( {}^{k-1}\mathcal{C}_{r+1}^A \wedge {}^1\mathcal{H}_r \right) / d_h {}^{k-1}\mathcal{C}_r.$$

Inoltre, si ha l'isomorfismo naturale

$${}^1\Lambda / {}^1\Theta \simeq {}^1\mathcal{H}, \quad (1.2)$$

e per ogni  $k > 1$  si ha l'isomorfismo naturale

$${}^k\Lambda / {}^k\Theta \simeq \left( {}^{k-1}\mathcal{C} \wedge {}^1\mathcal{H} \right) / d_h {}^{k-1}\mathcal{C}, \quad (1.3)$$

tramite i quali è possibile dare la successione esatta

$$0 \longrightarrow {}^0\Lambda \xrightarrow{E_0} {}^1\mathcal{H} \xrightarrow{E_1} \left( {}^1\mathcal{C} \wedge {}^1\mathcal{H} \right) / d_h {}^1\mathcal{C} \xrightarrow{E_2} \dots \xrightarrow{E_{k-1}} \left( {}^{k-1}\mathcal{C} \wedge {}^1\mathcal{H} \right) / d_h {}^{k-1}\mathcal{C} \xrightarrow{E_k} \dots$$

in cui la mappa  $E_0$  coincide con il differenziale orizzontale  $d_h$ . Pertanto, è evidente l'enunciato del prossimo teorema.

**Teorema 1.2.2** *Il limite diretto*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow {}^0\Lambda \xrightarrow{E_0} {}^1\Lambda / {}^1\Theta \xrightarrow{E_1} \dots \xrightarrow{E_{k-1}} {}^k\Lambda / {}^k\Theta \xrightarrow{E_k} \dots$$

della successione lagrangiana di ordine  $r$  è isomorfo alla successione

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow {}^0\Lambda \xrightarrow{E_0} {}^1\mathcal{H} \xrightarrow{E_1} \dots \xrightarrow{E_{k-1}} \left( {}^{k-1}\mathcal{C} \wedge {}^1\mathcal{H} \right) / d_h {}^{k-1}\mathcal{C} \xrightarrow{E_k} \dots$$

Per  $k \geq 0$ , si indichi con  $\Lambda^k(\mathbf{X})$  il fascio delle  $k$ -forme su  $\mathbf{X}$ . La proiezione  $\pi : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$  fornisce le inclusioni naturali  $\Lambda^0(\mathbf{X}) \subset \Lambda^0$  e  $\Lambda^1(\mathbf{X}) \subset \mathcal{H}$ .

Ora, si rammenti che la successione lagrangiana, nella formulazione di Tulczyjew e di

Takens, è data dalla riga in basso del seguente bicomplexo

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \overset{0}{\Lambda}(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \overset{0}{\Lambda} & \xrightarrow{d_v} & \overset{1}{\mathcal{C}} & \xrightarrow{d_v} & \overset{2}{\mathcal{C}} & \xrightarrow{d_v} & \dots \\
& & \downarrow d & & \downarrow d_h & & \downarrow -d_h & & \downarrow d_h & & \\
0 & \longrightarrow & \overset{1}{\Lambda}(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \overset{1}{\mathcal{H}} & \xrightarrow{d_v} & \overset{1}{\mathcal{C}} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}} & \xrightarrow{d_v} & \overset{2}{\mathcal{C}} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}} & \xrightarrow{d_v} & \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & \longrightarrow & \overset{1}{\mathcal{H}}/d_h \overset{0}{\Lambda} & \xrightarrow{E'_1} & (\overset{1}{\mathcal{C}} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}})/d_h \overset{1}{\mathcal{C}} & \xrightarrow{E'_2} & (\overset{2}{\mathcal{C}} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}})/d_h \overset{2}{\mathcal{C}} & \xrightarrow{E'_3} & \dots \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & & & 0 & & 0 & & 0 & & 
\end{array}$$

**Lemma 1.2.4** *Si ha il seguente diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc}
\overset{1}{\mathcal{H}} & \xrightarrow{E_1} & (\overset{1}{\mathcal{C}} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}})/d_h \overset{1}{\mathcal{C}} \\
& \searrow & \nearrow \tilde{E}_1 \\
& & \overset{1}{\mathcal{H}}/d_h \overset{0}{\Lambda}
\end{array}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti,  $E_1 \circ d_h = E_1 \circ E_0 = 0$ , quindi  $d_h \overset{0}{\Lambda} \subset \ker E_1$ . Pertanto, il morfismo di fasci  $E_1 : \overset{1}{\mathcal{H}} \longrightarrow (\overset{1}{\mathcal{C}} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}})/d_h \overset{1}{\mathcal{C}}$  passa al quoziente, permettendo di definire un morfismo

$$\tilde{E}_1 : \overset{1}{\mathcal{H}}/d_h \overset{0}{\Lambda} \longrightarrow (\overset{1}{\mathcal{C}} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}})/d_h \overset{1}{\mathcal{C}} : [\alpha] \longmapsto E_1(\alpha) . \quad \square$$

**Teorema 1.2.3** *La già citata successione lagrangiana del precedente diagramma è ottenuta dal limite diretto della successione lagrangiana di ordine  $r$ , mediante il diagramma*

*commutativo del precedente lemma e le uguaglianze*

$$E'_1 = \tilde{E}_1, \quad E'_k = E_k \quad \text{per } k > 1 .$$

**DIMOSTRAZIONE.** Segue dal fatto che, se  $\alpha \in \overset{k}{\Lambda}$ , allora  $E_k([\alpha]) \in \overset{k+1}{\Lambda} / \overset{k+1}{\Theta}$  corrisponde mediante il già citato isomorfismo naturale alla classe  $[h(d\alpha)] \in (\overset{k}{\mathcal{C}} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}) / d_h \overset{k}{\mathcal{C}}$ , quindi

$$[h(d\alpha)] = [h(d(h(\alpha) + v(\alpha)))] = [d_v h(\alpha) + d_h(v(\alpha))] = [d_v h(\alpha)] . \quad \boxed{QED}$$

**Osservazione 1.2.5** La formulazione dei bicompleksi lagrangiani sui getti di ordine finito presenta alcuni vantaggi rispetto alla formulazione dei bicompleksi lagrangiani sui getti di ordine infinito:

1. i bicompleksi lagrangiani sui getti di ordine infinito non sono costruiti come un limite diretto di bicompleksi di ordine finito; invece, come si è visto, i bicompleksi lagrangiani sui getti di ordine finito ammettono un limite diretto che produce la stessa successione lagrangiana;
2. la costruzione dei bicompleksi lagrangiani sui getti di ordine finito è molto più intuitiva della costruzione dei bicompleksi lagrangiani sui getti di ordine infinito, e molto più semplicemente ricollegabile al calcolo delle variazioni.

L'idea chiave che ha permesso la costruzione sui getti di ordine finito è dovuta a Krupka [Kru90], e consiste nell'estendere la formulazione di un problema variazionale a comprendere 1-forme su  $J_1\mathbf{Y}$  (lagrangiane generalizzate) (appendice A.8).  $\square$

### 1.3 Successione lagrangiana del primo ordine

In questa sezione si trovano fasci di morfismi fibrati che sono isomorfi ai fasci quoziente della successione lagrangiana del primo ordine.

Come conseguenza, si individuano i fasci degli oggetti geometrici del calcolo delle variazioni (lagrangiane, morfismi di Eulero–Lagrange, ecc.; si veda l'appendice A.8). Inoltre, è data una generalizzazione della definizione standard della forma di Poincaré–Cartan ed una formulazione intrinseca delle condizioni di variationalità locale di Helmholtz. Da ciò si può anche osservare che nel formalismo dei getti infiniti si perdono informazioni relativamente all'ordine del getto su cui gli oggetti sono definiti.

L'analisi inizia restringendo il bicomplesso lagrangiano del primo ordine al seguente

sottocomplesso esatto corto

$$\begin{array}{ccccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \overset{1}{\Theta}_1 & \xrightarrow{d} & \overset{2}{\Theta}_1 & \xrightarrow{d} & d\overset{2}{\Theta}_1 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \overset{0}{\Lambda}_1 & \xrightarrow{d} & \overset{1}{\Lambda}_1 & \xrightarrow{d} & \overset{2}{\Lambda}_1 & \xrightarrow{d} & d\overset{2}{\Lambda}_1 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \overset{0}{\Lambda}_1 & \xrightarrow{E_0} & \overset{1}{\Lambda}_1/\overset{1}{\Theta}_1 & \xrightarrow{E_1} & \overset{2}{\Lambda}_1/\overset{2}{\Theta}_1 & \xrightarrow{E_2} & E_2 \left( \overset{2}{\Lambda}_1/\overset{2}{\Theta}_1 \right) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
\end{array}$$

poiché, secondo quanto noto all'autore, se  $k \geq 4$  non c'è una interpretazione della colonna di grado  $k$  del bicomplesso lagrangiano in termini degli oggetti geometrici del calcolo delle variazioni (appendice A.8). La riga in basso al diagramma è detta *successione lagrangiana corta*.

### 1.3.a Morfismo di Eulero–Lagrange

In questa sottosezione verrà dimostrato che i fasci quoziente  $\overset{1}{\Lambda}_1/\overset{1}{\Theta}_1$ ,  $\overset{2}{\Lambda}_1/\overset{2}{\Theta}_1$  della successione lagrangiana del primo ordine sono isomorfi a certi sottofasci di fasci di sezioni di un fibrato vettoriale. In questo modo, si potranno dare in modo esplicito le espressioni in coordinate dei morfismi di fascio  $E_0$ ,  $E_1$ .

**Proposizione 1.3.1** *Si ha il morfismo naturale di fasci*

$$I_1 : \left( \overset{1}{\Lambda}_1/\overset{1}{\Theta}_1 \right) \longrightarrow \mathcal{H}_2^A : [\alpha] \longmapsto i_h \alpha .$$

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla precedente proposizione, essendo, per  $k = r = 1$ ,  $\overset{1}{\Theta}_1 = \overset{1}{\mathcal{C}}_1$ , quindi  $h(\overset{1}{\Theta}_1) = 0$ .  $\square$

**Osservazione 1.3.1** Se  $\alpha \in \overset{1}{\Lambda}_1$  ha l'espressione in coordinate  $\alpha = \alpha_0 d^0 + \alpha_i d^i + \alpha_i^0 d_0^i$ , allora si ha l'espressione in coordinate

$$L_\alpha = (\alpha_0 + \alpha_i y_0^i + \alpha_i^0 y_{00}^i) d^0 .$$

Inoltre, è chiaro che  $E_0$  si esprime attraverso  $I_1$  come

$$E_0 = i_h \circ d . \quad \square$$

Sia  $\mathcal{V}_1 := \mathcal{H}_2^A$ . Una sezione  $L \in \mathcal{V}_1$  è detta *lagrangiana del primo ordine generalizzata*. È bene notare che il fascio delle lagrangiane del primo ordine della letteratura standard (appendice A.8) è  $\mathcal{H}_1$ , e che  $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2^A$ .

Per quanto riguarda il fascio  $\Lambda_1^2/\Theta_1^2$ , tenendo conto dell'isomorfismo della proposizione 1.2.6, ci sono due obbiettivi principali:

1. per ogni  $\alpha \in \mathcal{C}_2^A \wedge \mathcal{H}_1$  trovare una 1-forma di contatto  $p_\alpha$  naturale e possibilmente unica, sotto un'appropriata condizione, in modo che il morfismo di fasci

$$I_2 : \left( \mathcal{C}_2^A \wedge \mathcal{H}_1 \right) / d_h \mathcal{C}_1 \longrightarrow \Lambda_{2+s}^2 : [\alpha] \longmapsto \alpha + d_h p(\alpha)$$

sia iniettivo (per qualche  $s \in \mathbb{N}$ );

2. caratterizzare l'immagine del precedente morfismo di fasci  $I_2$  in modo da ottenere un fascio di morfismi fibratiche sia isomorfo a  $\Lambda_1^2/\Theta_1^2$ .

Dunque, si cerca di raggiungere il primo obbiettivo mediante il lemma seguente.

**Lemma 1.3.1** *Esiste un morfismo naturale suriettivo*

$$p : \mathcal{C}_2 \wedge \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_{(2,1)} .$$

Inoltre,  $p$  soddisfa

$$p(d_h \beta) = -\beta \quad \forall \beta \in \mathcal{C}_1 .$$

**DIMOSTRAZIONE.** Si lavora con i fibrati vettoriali ricordando la definizione dei fasci  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{C}_{(2,1)}$ .

Prima di tutto, il morfismo fibrato  $\vartheta_2$  fornisce l'isomorfismo

$$\text{im } \vartheta_2^* \simeq J_2 \mathbf{Y} \times_{J_1 \mathbf{Y}} V^* J_1 \mathbf{Y} .$$

Allora,  $\dim \mathbf{X} = 1$  implica l'esistenza del seguente isomorfismo naturale

$$(\text{im } \vartheta_2^*) \wedge_{J_2 \mathbf{Y}} T^* \mathbf{X} \longrightarrow V^* J_1 \mathbf{Y} \otimes_{J_2 \mathbf{Y}} T^* \mathbf{X} .$$

L'inclusione naturale  $V_{\mathbf{Y}} J_1 \mathbf{Y} \hookrightarrow V J_1 \mathbf{Y}$ , ove  $V_{\mathbf{Y}} J_1 \mathbf{Y} := \ker T\pi_0^1$ , induce la restrizione fibrata verticale  $V^* J_1 \mathbf{Y} \longrightarrow V_{\mathbf{Y}}^* J_1 \mathbf{Y}$ .

La struttura affine di  $J_1\mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Y}$  dà l'isomorfismo fibrato  $V_{\mathbf{Y}}^*J_1\mathbf{Y} \simeq T\mathbf{X} \otimes_{J_1\mathbf{Y}} V^*\mathbf{Y}$ .

Per composizione, si ha il morfismo fibrato

$$(\text{im } \vartheta_2^*) \wedge_{J_2\mathbf{Y}} T^*\mathbf{X} \longrightarrow J_2\mathbf{Y} \times_{\mathbf{Y}} \left( T\mathbf{X} \otimes_{\mathbf{Y}} V^*\mathbf{Y} \otimes_{\mathbf{Y}} T^*\mathbf{X} \right).$$

Componendo il precedente morfismo con una contrazione (che qui è un isomorfismo), e con l'isomorfismo

$$\left( J_2\mathbf{Y} \times_{\mathbf{Y}} V^*\mathbf{Y} \right) \longrightarrow \left( J_2\mathbf{Y} \times_{J_1\mathbf{Y}} \text{im } \vartheta_1^* \right)$$

indotto da  $\vartheta_1$ , si ottiene un morfismo fibrato che induce il morfismo di fasci cercato.

Infine, se, in coordinate,  $\alpha = \alpha_i \vartheta^i \wedge d^0 + \alpha_i^0 \vartheta_0^i \wedge d^0$  (con  $\alpha_i, \alpha_i^0 \in \Lambda_2^0$ ), allora l'espressione in coordinate di  $p(\alpha)$  è

$$p(\alpha) = \alpha_i^0 \vartheta^i.$$

Mediante questa espressione in coordinate si dimostra facilmente l'ultimo asserto dell'enunciato.

QED

Si noti che un risultato analogo è raggiunto in [Kol93].

**Proposizione 1.3.2** *Il morfismo di fasci*

$$\left( \mathcal{C}_2^A \wedge \mathcal{H}_1 \right) \longrightarrow \Lambda_3^2 : \alpha \longmapsto \alpha + d_h p(\alpha)$$

*induce il morfismo iniettivo di fasci*

$$I_2 : \left( \mathcal{C}_2^A \wedge \mathcal{H}_1 \right) / d_h \mathcal{C}_1 \longrightarrow \Lambda_3^2 : [\alpha] \longmapsto \alpha + d_h p(\alpha)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Il morfismo è ben definito, poiché se  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_2^A \wedge \mathcal{H}_1$  tali che  $\beta = \alpha + d_h q$ , with  $q \in \mathcal{C}_1$ , allora

$$\beta + d_h p(\beta) = \alpha + d_h q + d_h p(\alpha) + d_h p(d_h q);$$

ma vale  $p(d_h q) = -q$  quindi  $\beta + d_h p(\beta) = \alpha + d_h p(\alpha)$ .

Bisogna provare l'iniettività del morfismo. Ricordando il morfismo iniettivo dell'osservazione 1.2.4, si calcolano le classi di equivalenza delle sezioni di  $\mathcal{C}_2^A \wedge \mathcal{H}_1$  nello spazio immagine. Quindi, se  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_2^A \wedge \mathcal{H}_1$  sono tali che

$$\beta + d_h p(\beta) = \alpha + d_h p(\alpha),$$

allora  $\beta - \alpha \in d_h \mathcal{C}_{(2,1)}^1$ , che conclude la prova.  $\square$

**Osservazione 1.3.2** Se  $\alpha \in \mathcal{C}_2^A \wedge \mathcal{H}_1$ , e se l'espressione in coordinate di  $\alpha$  è  $\alpha = \alpha_i \vartheta^i \wedge d^0 + \alpha_i^0 \vartheta_0^i \wedge d^0$  (con  $\alpha_i, \alpha_i^0 \in \Lambda_2^0$  due funzioni affini rispetto alla struttura affine di  $J_2 \mathbf{Y} \longrightarrow J_1 \mathbf{Y}$ ), allora l'espressione in coordinate di  $\alpha + d_h p(\alpha)$  è

$$\alpha + d_h p(\alpha) = (\alpha_i - \mathfrak{D}_{30} \alpha_i^0) \vartheta^i \wedge d^0 . \quad \square$$

Il secondo punto del programma è la caratterizzazione dell'immagine di  $I_2$ . A questo scopo, usiamo la versione geometrica della formula di variazione prima, come data in [Kol83].

**Proposizione 1.3.3** Sia  $\alpha \in \mathcal{C}_2^A \wedge \mathcal{H}_1$ . Allora, la forma  $p(\alpha)$  è l'unica sezione del fascio  $\mathcal{C}_2^1$  tale che

$$\alpha + d_h p(\alpha) \in \left( \mathcal{C}_{(3,1)}^A \wedge \mathcal{H}_2 \right) \subset \left( \mathcal{C}_3 \wedge \mathcal{H}_3 \right) .$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\alpha \in \mathcal{C}_2^A \wedge \mathcal{H}_1$ ,  $q \in \mathcal{C}_2$ , e si supponga che le espressioni in coordinate di  $\alpha, q$  siano

$$\alpha = \alpha_i \vartheta^i \wedge d^0 + \alpha_i^0 \vartheta_0^i \wedge d^0 , \quad q = q_i \vartheta^i + q_i^0 \vartheta_0^i$$

(si ricordi che  $\alpha_i$  e  $\alpha_i^0$  sono funzioni affini su  $J_2 \mathbf{Y}$ ).

Allora,

$$d_h q = \mathfrak{D}_{30} q_i d^0 \wedge \vartheta^i + \mathfrak{D}_{30} q_i^0 d^0 \wedge \vartheta_0^i + q_i (-\vartheta^i \wedge d^0) + q_i^0 (-\vartheta_{00}^i \wedge d^0) ,$$

Osservando l'espressione di  $\alpha + d_h q$ , si nota che, per avere  $\alpha + d_h q \in \mathcal{C}_{(3,1)}^A \wedge \mathcal{H}_2$ , deve essere  $q_i^0 = 0$ , quindi  $q^i = \alpha_i^i$ .  $\square$

**Osservazione 1.3.3** La scelta del sottofascio

$$\left( \mathcal{C}_{(3,1)}^A \wedge \mathcal{H}_2 \right) \subset \left( \mathcal{C}_3 \wedge \mathcal{H}_3 \right)$$

fornirà rappresentanti del fascio quoziente  $\Lambda_1^2 / \Theta_1^2$  con un numero minimo di componenti.  $\square$

**Teorema 1.3.1** Si ha l'isomorfismo di fasci

$$I_2 : \Lambda_1^2 / \Theta_1^2 \longrightarrow \mathcal{V}_1,$$

dove

$$\mathcal{V}_1^2 := \left( \mathcal{C}_2^A \wedge \mathcal{H}_1 + d_h \mathcal{C}_2^1 \right) \cap \left( \mathcal{C}_{(3,1)}^1 \wedge \mathcal{H}_3 \right) .$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'isomorfismo della proposizione 1.2.6, dal morfismo iniettivo  $I_2$  e dalla precedente caratterizzazione dell'immagine di  $I_2$ .  $\square$

**Osservazione 1.3.4** Il fascio  $\mathcal{V}_1^2$  è un fascio di spazi vettoriali reali, ma non ha la struttura di modulo sull'anello  $\mathcal{C}^\infty(J_3\mathbf{Y})$ ; quindi, non può essere il fascio delle sezioni di un fibrato vettoriale [Wel80].  $\square$

**Corollario 1.3.1** Sia  $\alpha \in \mathcal{V}_1^1$ , e sia  $\alpha = (\alpha_0 + \alpha_i y_{00}^i) d^0$  l'espressione in coordinate di  $\alpha$ .

Allora, si ha l'espressione in coordinate

$$E_1(\alpha) = E_i \vartheta^i \wedge d^0 ,$$

con

$$\begin{aligned} E_i = & \partial_i(\alpha_0 + y_{00}^j \alpha_j) + \\ & + \mathbb{A}_{30}(\partial_0 \alpha_i + y_{00}^j \partial_j \alpha_i + y_{00}^j \partial_j^0 \alpha_i - \partial_i^0 \alpha_0 - y_{00}^j \partial_i^0 \alpha_j) . \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. È un calcolo diretto, usando l'identità

$$E_1((\alpha_0 + \alpha_i y_{00}^i) d^0) = E_{h \circ d} \beta ,$$

dove  $\beta = \alpha_0 d^0 + \alpha_i d_0^i$ .  $\square$

Una sezione  $E \in \mathcal{V}_1^2$  è detta *morfismo di Eulero–Lagrange del primo ordine generalizzato*.  $E_1$  è detto *operatore di Eulero–Lagrange generalizzato*.

**Osservazione 1.3.5** È di fondamentale importanza notare che l'operatore di Eulero–Lagrange standard (vedere la proposizione 1.3.4 e l'appendice A.8) produce esattamente lo stesso risultato di  $E_1(\alpha)$  quando è applicato ad una lagrangiana del secondo ordine  $\alpha \in \mathcal{H}_2^A$ .

Ciò implica che le teorie meccaniche basate su lagrangiane affini del secondo ordine possono essere viste anche come teorie del primo ordine usando lagrangiane non orizzontali (si veda l'appendice A.8 per maggiori dettagli). Ed è bene ricordare che la maggior parte delle lagrangiane del secondo ordine note in fisica sono affini.  $\square$

Tenendo conto dell'osservazione precedente, si dà il seguente risultato sui morfismi di Eulero–Lagrange del secondo ordine.

**Corollario 1.3.2** Sia  $\alpha \in \mathcal{A}_1^2$ . Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.

1.  $\alpha \in \left( \overset{1}{\mathcal{H}}_{(1,0)} \wedge \overset{1}{\Lambda}_1 \right) \subset \overset{2}{\Lambda}_1$ ;
2.  $p(h(\alpha)) \in \overset{1}{\mathcal{C}}_1$ ;
3.  $I_2([\alpha]) \in \overset{2}{\mathcal{V}}_1$  è una forma sullo spazio dei getti del secondo ordine  $J_2\mathbf{Y}$ .

Inoltre, il sottofascio di  $\overset{2}{\mathcal{V}}_1$  che contiene tutti e soli i morfismi di Eulero–Lagrange generalizzati che soddisfano una delle condizioni precedenti è il sottofascio

$$\overset{1}{\mathcal{C}}_{(2,0)}^A \wedge \overset{1}{\mathcal{H}} \subset \overset{2}{\mathcal{V}}_1 .$$

DIMOSTRAZIONE. La prima proposizione viene facilmente dalle espressioni in coordinate. Per la seconda proposizione, basta notare (mediante le espressioni in coordinate) che tutti i morfismo di Eulero–Lagrange del secondo ordine sono contenuti in  $\overset{1}{\mathcal{C}}_{(2,0)}^A \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}$ , e che l'isomorfismo  $I_2$  è suriettivo su tale sottofascio (mediante una partizione dell'unità).

QED

### 1.3.b Morfismo di Helmholtz

Questa sottosezione è dedicata ad una descrizione del fascio

$$E_2 \left( \overset{2}{\mathcal{V}}_1 \right) \simeq E_2 \left( \overset{2}{\Lambda}_1 / \overset{2}{\Theta}_1 \right) = \left( d\overset{2}{\Lambda}_1 / d\overset{2}{\Theta}_1 \right) .$$

In particolare, verrà trovato un isomorfismo di questo fascio con un fascio di morfismo fibrati. Ciò renderà possibile dare una espressione in coordinate della mappa  $E_2$ , e fornirà un oggetto geometrico intrinseco il cui annullarsi è equivalente alle condizioni di Helmholtz di variabilità locale.

Sarebbe auspicabile procedere per analogia con il caso del morfismo di Eulero–Lagrange. Ma ci sono le seguenti difficoltà.

1. In questo caso, a differenza del morfismo di Eulero–Lagrange, si ha a che fare con 3–forme; sfortunatamente, non sono a conoscenza dell'autore morfismi naturali che possano giocare un ruolo analogo a quello di  $p$ .
2. Sia  $E \in \overset{2}{\mathcal{V}}_1$ . Allora, per calcolare l'espressione di  $E_2(E)$ , è molto difficile trovare una 2–forma  $\alpha \in \overset{2}{\Lambda}_1$  tale che  $I_2([\alpha]) = E$ . Così, è difficile usare la commutatività del diagramma per calcolare  $E_2$  nei casi concreti.

Quindi, il modo più conveniente per raggiungere lo scopo è di usare la proposizione 1.2.6 insieme all'isomorfismo  $\overset{2}{\Lambda}_1/\overset{2}{\Theta}_1 \longrightarrow \overset{2}{\mathcal{V}}_1$  per semplificare l'analisi del fascio  $E_2\left(\overset{2}{\Lambda}_1/\overset{2}{\Theta}_1\right)$ .

**Lemma 1.3.2** *Si ha l'inclusione naturale*

$$\left(d\overset{2}{\Lambda}_1/d\overset{2}{\Theta}_1\right) \longrightarrow \left(\overset{2}{\mathcal{C}}_4^A \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_3\right) / d_h \overset{2}{\mathcal{C}}_3 : [d\alpha] \longmapsto [dE_1(\alpha)] .$$

DIMOSTRAZIONE. È una conseguenza diretta dell'identità

$$\alpha = E_1(\alpha) - d_h p(h(\alpha)) + v(\alpha) .$$

e di  $dd_h = -d_h d_v$ .  $\square$

Quindi, si cercano rappresentanti naturali delle classi dell'immagine di

$$d\overset{2}{\mathcal{V}}_1 \subset \left(\overset{1}{\Lambda}_3 \wedge \overset{1}{\mathcal{C}}_{(3,1)} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_3\right) \subset \left(\overset{1}{\mathcal{C}}_4^A \wedge \overset{1}{\mathcal{C}}_{(3,1)} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_3\right) \subset \left(\overset{2}{\mathcal{C}}_4^A \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_3\right)$$

nel quoziente  $\left(\overset{2}{\mathcal{C}}_4^A \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_3\right) / d_h \overset{2}{\mathcal{C}}_3$ ; questa immagine è denotata da  $[d\overset{2}{\mathcal{V}}_1]$ . È possibile caratterizzare un unico rappresentante di ogni classe di equivalenza di  $[d\overset{2}{\mathcal{V}}_1]$  per mezzo del morfismo di Eulero–Lagrange standard. La formulazione geometrica del calcolo delle variazioni è stata sviluppata principalmente in [Fer83], [FeFr82], [GaMu82], [Kol83], [Kru83], [Sau89]. La seguente formula di decomposizione è dovuta a Kolář [Kol83], e fornisce un'estensione al calcolo delle variazioni di ordine maggiore di 1 del morfismo iniettivo  $I_2$  della sottosezione precedente. Il risultato verrà solamente riformulato nella presente notazione.

**Proposizione 1.3.4** (*Formula della variazione prima*) *Sia  $\alpha \in \overset{1}{\Lambda}_r \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_r$ . Allora esiste un unico  $E_\alpha \in \overset{1}{\mathcal{C}}_{(2r,1)} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_{2r}$  e un unico  $p_\alpha \in \overset{1}{\mathcal{C}}_{(2r-1,r)}$  tali che*

$$\pi_r^{2r*} \alpha = E_\alpha - d_h p_\alpha .$$

DIMOSTRAZIONE. Per una prova, vedere [Kol83]. l'unicità di  $p_\alpha$  segue dal lemma 1.2.1.  $\square$

D'ora in avanti si supporrà che  $\underline{p}$  sia un multiindice tale che  $1 \leq |\underline{p}|$ .

**Osservazione 1.3.6** Sia  $\alpha = \alpha_i d^i \wedge d^0 + \alpha_i^{\underline{p}} d_{\underline{p}}^i \wedge d^0$  l'espressione in coordinate  $\alpha$  ( $s \geq 1$ ). Allora, l'espressione in coordinate di  $E_\alpha$  viene a essere

$$E_\alpha = (\alpha_i + (-1)^{|\underline{p}|} J_{\underline{p}} \alpha_i^{\underline{p}}) \vartheta^i \wedge d^0 \quad \square$$

Secondo il lemma 1.3.2 si procede fornendo un rappresentante di ogni classe di equivalenza di  $[d\mathcal{V}_1^2]$  su di un aperto coordinato. Poi verrà caratterizzato questo rappresentante, provando che è intrinseco. Prima di tutto, è necessario il seguente lemma tecnico.

**Lemma 1.3.3** *Sia  $\beta \in \overset{1}{\Lambda}_3 \wedge \overset{1}{\mathcal{C}}_{(3,1)} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_3$ . Si supponga che l'espressione in coordinate di  $\beta$  sia*

$$\beta = \beta_{ij} \vartheta^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 + 2\beta_{ij}^{\underline{p}} \vartheta_{\underline{p}}^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 .$$

*Sia  $u : \mathbf{Y} \longrightarrow V\mathbf{Y}$  un campo vettoriale verticale con espressione in coordinate  $u = u^i \partial_i$ . Allora si ha  $E_{i_{u_3}\beta} = e_j \vartheta^j \wedge d^0$ , con*

$$\begin{aligned} e_j = & 2u^i (\beta_{ij} - J_0 \beta_{ij}^0 + J_{00} \beta_{ij}^{00} - J_{000} \beta_{ij}^{000}) \\ & + 2J_0 u^i (\beta_{ij}^0 + \beta_{ji}^0 - 2J_0 \beta_{ji}^{00} + 3J_{00} 2\beta_{ji}^{000}) \\ & + 2J_{00} u^i (\beta_{ij}^{00} - \beta_{ji}^{00} + 3J_0 \beta_{ji}^{000}) \\ & + 2J_{000} u^i (\beta_{ij}^{000} + \beta_{ji}^{000}) \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dall'espressione in coordinate di  $E_{i_{u_3}\beta}$  e dalla regola di Leibnitz per  $J_{\underline{p}}$ . ◻

Il lemma seguente è dovuto a Krupka [Kru90]. Una forma alternativa di questo risultato si può trovare in [Bau82].

**Lemma 1.3.4** *Sia  $\mathbf{U} \subset \mathbf{Y}$  un aperto coordinato, e sia*

$$\beta \in \left( \overset{1}{\Lambda}_3 \wedge \overset{1}{\mathcal{C}}_{(3,1)} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_3 \right)_{\mathbf{U}} ,$$

*con espressione in coordinate*

$$\beta = \beta_{ij} \vartheta^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 + 2\beta_{ij}^{\underline{p}} \vartheta_{\underline{p}}^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 .$$

*Allora esistono*

$$\tilde{H}_{\beta}[\mathbf{U}] \in \left( \left( \overset{1}{\mathcal{C}}_{(6,4)} \wedge \overset{1}{\mathcal{C}}_{(6,1)} \right)^A \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_5 \right)_{\mathbf{U}}$$

*e*

$$\tilde{q}_{\beta}[\mathbf{U}] \in \left( \overset{1}{\mathcal{C}}_{(5,3)} \wedge \overset{1}{\mathcal{C}}_{(5,2)} \right)^A_{\mathbf{U}}$$

*tali che*

$$\pi_3^{6*} \beta = \tilde{H}_{\beta}[\mathbf{U}] - d_h \tilde{q}_{\beta}[\mathbf{U}] .$$

DIMOSTRAZIONE. Si procede decomponendo i coefficienti di  $\pi_3^{6*}\beta$  in parte simmetrica e antisimmetrica

$$\begin{aligned}
(\beta_{ij}^0 - \beta_{ji}^0)\vartheta_0^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 &= d_h(\beta_{ij}^0\vartheta^i \wedge \vartheta^j) - J_0\beta_{ij}^0\vartheta^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 \\
(\beta_{ij}^{00} + \beta_{ji}^{00})\vartheta_{00}^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 &= d_h((\beta_{ij}^{00} + \beta_{ji}^{00})\vartheta_0^i \wedge \vartheta^j - J_0\beta_{ij}^{00}\vartheta^i \wedge \vartheta^j) \\
&\quad - 2J_0\beta_{ji}^{00}\vartheta_0^i \wedge \vartheta^0 \wedge d^0 + J_{00}\beta_{ij}^{00}\vartheta^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 \\
(\beta_{ij}^{000} - \beta_{ji}^{000})\vartheta_{000}^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 &= d_h((\beta_{ij}^{000} - \beta_{ji}^{000})\vartheta_{00}^i \wedge \vartheta^j - \beta_{ij}^{000}\vartheta_0^i \wedge \vartheta_0^j) \\
&\quad + d_h(-(J_0\beta_{ij}^{000} + 2J_0\beta_{ji}^{000})\vartheta_0^i \wedge \vartheta^j + J_{00}\beta_{ij}^{000}\vartheta^i \wedge \vartheta^j) \\
&\quad - J_{000}\beta_{ij}^{000}\vartheta^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 + 3J_{00}\beta_{ji}^{000}\vartheta_0^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 \\
&\quad + 3J_0\beta_{ji}^{000}\vartheta_{00}^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 .
\end{aligned}$$

Così, la prova è completata ponendo

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_\beta[\mathbf{U}] &= (\beta_{ij} - J_0\beta_{ij}^0 + J_{00}\beta_{ij}^{00} - J_{000}\beta_{ij}^{000})\vartheta^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 \\
&\quad + (\beta_{ij}^0 + \beta_{ji}^0 - 2J_0\beta_{ji}^{00} + 3J_{00}\beta_{ji}^{000})\vartheta_0^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 \\
&\quad + (\beta_{ij}^{00} - \beta_{ji}^{00} + 3J_0\beta_{ji}^{000})\vartheta_{00}^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 + (\beta_{ij}^{000} + \beta_{ji}^{000})\vartheta_{000}^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_\beta[\mathbf{U}] &= (-\beta_{ij}^0 + J_0\beta_{ij}^{00} - J_{00}\beta_{ij}^{000})\vartheta^i \wedge \vartheta^j \\
&\quad - (\beta_{ij}^{00} + \beta_{ji}^{00} - J_0\beta_{ij}^{000} - 2J_0\beta_{ji}^{000})\vartheta_0^i \wedge \vartheta^j \\
&\quad + \beta_{ij}^{000}\vartheta_0^i \wedge \vartheta_0^j - (\beta_{ij}^{000} - \beta_{ji}^{000})\vartheta_{00}^i \wedge \vartheta^j . \quad \boxed{QED}
\end{aligned}$$

**Teorema 1.3.2** (*Formula di variazione seconda generalizzata*).

Per ogni  $\beta \in \overset{1}{\Lambda}_3 \wedge \overset{1}{\mathcal{C}}_{(3,1)} \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_3$  esiste un unico

$$H_\beta \in \left( \overset{1}{\mathcal{C}}_{(6,4)} \wedge \overset{1}{\mathcal{C}}_{(6,1)} \right)^A \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_5$$

tale che

1. rispetto all'inclusione dell'osservazione 1.2.4 si ha  $[\beta] = [H_\beta]$ ;
2.  $\forall u : \mathbf{Y} \longrightarrow V\mathbf{Y}$  ,  $E_{i_{u_3}\beta} = 0 \iff H_\beta = 0$  .

DIMOSTRAZIONE. Si usa il lemma precedente con le stesse espressioni in coordinate. Per via della proposizione 1.2.6 e dell'osservazione 1.2.4, su ogni aperto coordinato  $\mathbf{U} \subset \mathbf{Y}$  la forma  $\tilde{H}_\beta[\mathbf{U}]$  soddisfa la prima condizione dell'enunciato.

La condizione  $\tilde{H}_\beta[\mathbf{U}] = 0$  è equivalente a

$$\begin{aligned} 2\beta_{ij} - (J_0\beta_{ij}^0 - J_0\beta_{ij}^0) + (J_{00}\beta_{ij}^{00} - J_{00}\beta_{ji}^{00}) - (J_{000}\beta_{ij}^{000} - J_{000}\beta_{ji}^{000}) &= 0 \\ \beta_{ij}^0 + \beta_{ji}^0 - 2J_0\beta_{ji}^{00} + 3J_{00}\beta_{ji}^{000} &= 0 \\ \beta_{ij}^{00} - \beta_{ji}^{00} + 3J_0\beta_{ji}^{000} &= 0 \\ \beta_{ij}^{000} + \beta_{ji}^{000} &= 0 . \end{aligned}$$

Inoltre, l'arbitrarietà di  $u$  implica che  $E_{i_{u_3}\beta} = 0$  se e solo se valgono le seguenti condizioni locali:

$$\begin{aligned} \beta_{ij} - J_0\beta_{ij}^0 + J_{00}\beta_{ij}^{00} - J_{000}\beta_{ij}^{000} &= 0 \\ \beta_{ij}^0 + \beta_{ji}^0 - 2J_0\beta_{ji}^{00} + 3J_{00}\beta_{ji}^{000} &= 0 \\ \beta_{ij}^{00} - \beta_{ji}^{00} + 3J_0\beta_{ji}^{000} &= 0 \\ \beta_{ij}^{000} + \beta_{ji}^{000} &= 0 \end{aligned}$$

È possibile decomporre la prima equazione del sistema precedente nella sua parte simmetrica e antisimmetrica. Allora, la seconda e la quarta equazione del sistema precedente implicano l'annullarsi della parte simmetrica della prima condizione. Quindi, si ottiene che  $E_{i_{u_3}\beta} = 0$  per ogni campo vettoriale certicale  $u$  su  $\mathbf{Y}$  se e solo se  $\tilde{H}_\beta[\mathbf{U}] = 0$ . Così, la seconda condizione dell'enunciato è soddisfatta localmente da  $\tilde{H}_\beta[\mathbf{U}]$ .

Siano  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{U}'$  due aperti coordinati con intersezione non vuota. Allora, essendo  $E_{i_{u_3}\beta} = 0$  una condizione intrinseca, si ottiene

$$\tilde{H}_\beta[\mathbf{U}]|_{\mathbf{U} \cap \mathbf{U}'} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_\beta[\mathbf{U}']|_{\mathbf{U} \cap \mathbf{U}'} = 0 .$$

Ma la formula precedente è chiaramente equivalente a

$$\tilde{H}_\beta[\mathbf{U}]|_{\mathbf{U} \cap \mathbf{U}'} = \tilde{H}_\beta[\mathbf{U}']|_{\mathbf{U} \cap \mathbf{U}'} .$$

Se, per ogni aperto coordinato  $\mathbf{U} \subset \mathbf{Y}$ , si pone

$$H_\beta := \tilde{H}_\beta[\mathbf{U}] ,$$

allora si ottiene che  $H_\beta$  è un oggetto intrinseco che soddisfa le condizioni dell'enunciato. Questo completa la prova.  $\square$

**Corollario 1.3.3** Sia  $\beta \in \Lambda_3 \wedge \mathcal{C}_{(3,1)}^1 \wedge \mathcal{H}_3$ .

Allora esiste un unico

$$H_\beta \in \left( \mathcal{C}_{(6,4)}^1 \wedge \mathcal{C}_{(6,1)}^1 \right)^A \wedge \mathcal{H}_5$$

e un unico

$$q_\beta \in \left( \mathcal{C}_{(5,3)}^1 \wedge \mathcal{C}_{(5,2)}^1 \right)^A$$

tali che

1.  $\pi_3^{6*} \beta = \tilde{H}_\beta - d_h q_\beta$  ;
2.  $\forall u : \mathbf{Y} \longrightarrow V\mathbf{Y}$  ,  $E_{i u_3 \beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_\beta = 0$  .

DIMOSTRAZIONE. Dal lemma 1.2.1.  $\square$

**Corollario 1.3.4**  $E_2 \left( \mathcal{V}_1^2 \right)$  è isomorfo all'immagine del morfismo iniettivo

$$I_3 : \left( d\Lambda_1 / d\Theta_1^2 \right) \longrightarrow \left( \mathcal{C}_5^1 \wedge \mathcal{C}_{(5,1)}^1 \right)^A \wedge \mathcal{H}_4^1 : [d\alpha] \longmapsto H_{d(E_1([\alpha]))} .$$

DIMOSTRAZIONE.  $I_3$  ha valori in

$$\left( \mathcal{C}_5^1 \wedge \mathcal{C}_{(5,1)}^1 \right)^A \wedge \mathcal{H}_4^1 \subset \left( \mathcal{C}_{(6,4)}^1 \wedge \mathcal{C}_{(6,1)}^1 \right)^A \wedge \mathcal{H}_5^1$$

per via dell'espressione in coordinate di  $E_1(\alpha)$  and  $H_{d(E_1(\alpha))}$ . L'iniettività di  $I_3$  segue dal corollario precedente e dal lemma 1.3.2.  $\square$

**Osservazione 1.3.7** A differenza del morfismo di Eulero–Lagrange, il morfismo di Helmholtz non è caratterizzato dall'appartenenza ad un particolare sottofascio. Tuttavia, l'annullarsi di  $[d\alpha]$  è completamente equivalente all'annullarsi di  $H_{d\alpha}$ . Questo risultato è ottenuto in modo più complicato in [AnDu80]; si veda anche [GiMa90] per una derivazione delle condizioni di Helmholtz per mezzo delle equazioni di Eulero–Lagrange. Inoltre, è evidente che l'annullarsi di  $H_{d\alpha}$  è una condizione più debole dell'annullarsi di  $d\alpha$ .  $\square$

**Corollario 1.3.5** Il morfismo di fasci  $E_2$  può essere espresso mediante  $I_2$  e  $I_3$  da

$$E_2 : \mathcal{V}_1^2 \longrightarrow \left( \mathcal{C}_5^1 \wedge \mathcal{C}_{(5,1)}^1 \right)^A \wedge \mathcal{H}_4^1 : E \longmapsto H_{dE} .$$

Inoltre, se l'espressione in coordinate di  $E$  è  $E = E_j \vartheta^j \wedge d^0$ , allora l'espressione in coordinate di  $E_2(E)$  è

$$\begin{aligned} E_2(E) = & (\partial_i E_j - J_0 \partial_i^0 E_j + J_{00} \partial_i^{00} E_j - J_{000} \partial_i^{000} E_j) \vartheta^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 \\ & + (\partial_i^0 E_j + \partial_j^0 E_i - 2J_0 \partial_j^{00} E_i + 3J_{00} \partial_j^{000} E_i) \vartheta_0^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 \\ & + (\partial_i^{00} E_j - \partial_j^{00} E_i + 3J_0 \partial_j^{000} E_i) \vartheta_{00}^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 \\ & + (\partial_i^{000} E_j + \partial_j^{000} E_i) \vartheta_{000}^i \wedge \vartheta^j \wedge d^0 . \end{aligned}$$

**Osservazione 1.3.8** È facile rendersi conto che, analogamente a  $\mathcal{V}_1^2$ ,  $E_2 \left( \mathcal{V}_1^2 \right)$  non è il fascio delle sezioni di un fibrato vettoriale.  $\square$

$E_2$  è detto *operatore di Helmholtz generalizzato*. Si possono riassumere i risultati di questa sezione nel teorema seguente.

**Teorema 1.3.3** *La successione lagrangiana del primo ordine corta è isomorfa alla successione esatta*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Lambda_1^0 \xrightarrow{E_0} \mathcal{V}_1^1 \xrightarrow{E_1} \mathcal{V}_1^2 \xrightarrow{E_2} E_2 \left( \mathcal{V}_1^2 \right) \longrightarrow 0 .$$

dove si è posto  $\mathcal{V}_1^1 := \mathcal{H}_2^A$ , e  $E_2 \left( \mathcal{V}_1^2 \right)$  è isomorfo all'immagine del morfismo iniettivo del teorema precedente.

**Corollario 1.3.6** (*Problema inverso globale*). Sia  $E \in \left( \mathcal{V}_1^2 \right)_{\mathbf{Y}}$  una sezione globale tale che  $E_2(E) = 0$ . Si supponga, inoltre, che valga

$$H_{de\ Rham}^2 \mathbf{Y} = 0 .$$

Allora esiste una sezione globale  $L \in \left( \mathcal{V}_1^1 \right)_{\mathbf{Y}}$  tale che  $E_1(L) = E$ .

**Osservazione 1.3.9** È bene notare che il precedente risultato può essere dedotto solo per mezzo della successione lagrangiana lunga. Infatti, in generale, la successione lagrangiana corta non è una risoluzione soft, né tantomeno una risoluzione aciclica, del fascio costante  $\mathbb{R}$ , e il teorema astratto di de Rham non è applicabile (appendice A.3).  $\square$

**Osservazione 1.3.10** In questa sottosezione si è ottenuto un morfismo di Helmholtz intrinseco associato ad ogni morfismo di Eulero–Lagrange generalizzato del primo ordine mediante il morfismo di fasci  $E_2$ . L'annullarsi del morfismo di Helmholtz è completamente equivalente alle condizioni locali di Helmholtz standard (si veda, per esempio, [GiMa90]).

Come sottoprodotto, si ottiene una unica 2-forma di contatto intrinseca  $q_{dE}$  associata ad ogni morfismo di Eulero–Lagrange generalizzato del primo ordine;  $q$  gioca un ruolo analogo a  $p$ .  $\square$

## 1.4 Interpretazione meccanica

Questa sezione è dedicata ad una interpretazione originale della meccanica mediante il bicompleso lagrangiano di ordine finito, che è stata sviluppata in [MoVi95]. Si vedrà che il bicompleso fornisce un utile schema logico in cui organizzare gli oggetti fondamentali

del formalismo lagrangiano e le loro relazioni differenziali. In particolare, si otterrà una tabella che mostrerà la *lagrangiana*  $\lambda$ , il *momento*  $\pi$ , la *forma di Poincaré–Cartan*  $\tau$ , la *forma dinamica*  $\omega$ , la *forma di Eulero–Lagrange*  $\epsilon$ , la *forma di Helmholtz*  $\eta$ , l'*operatore di Eulero–Lagrange*  $E_1$  e l'*operatore di Helmholtz*  $E_2$ , secondo lo schema seguente

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi \in \overset{1}{\Theta}_1 & \xrightarrow{d} & \overset{2}{\Theta}_1 & \xrightarrow{d} & \overset{3}{\Theta}_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \tau \in \overset{1}{\Lambda}_1 & \xrightarrow{d} & \Omega \in \overset{2}{\Lambda}_1 & \xrightarrow{d} & \overset{3}{\Lambda}_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \lambda \in \overset{1}{\Lambda}_1/\overset{1}{\Theta}_1 & \xrightarrow{E_1} & \epsilon \in \overset{2}{\Lambda}_1/\overset{2}{\Theta}_1 & \xrightarrow{E_2} & \eta \in \overset{3}{\Lambda}_1/\overset{3}{\Theta}_1
 \end{array}$$

### 1.4.a La colonna cinematica

Si può interpretare la proiezione sul quoziente mediante  $h$ .

**Proposizione 1.4.1** *La mappa data dalla composizione*

$$\overset{1}{\Lambda}_1 \hookrightarrow \overset{1}{\mathcal{H}}_{(2,1)} \xrightarrow{h} \overset{1}{\mathcal{H}}_2$$

passa al quoziente  $\overset{1}{\Lambda}_1/\overset{1}{\Theta}_1$  fornendo l'isomorfismo di fasci

$$[h] : \overset{1}{\Lambda}_1/\overset{1}{\Theta}_1 \longrightarrow \overset{1}{\mathcal{H}}_2^A : [l] \longmapsto h(l).$$

Per  $l \in \overset{1}{\Lambda}_1$ , si ha l'espressione in coordinate

$$[h] : [l_0 d^0 + l_i \theta^i + l_i^0 d_0^i] \longmapsto (l_0 + l_i^0 y_{00}^i) d^0.$$

Ora si analizzano le possibili decomposizioni della colonna cinematica. Per questo scopo c'è la necessità di trovare una successione esatta tra gli stessi oggetti, ma con le frecce rovesciate. Il prossimo risultato fornisce una tale successione.

**Definizione 1.4.1** Si definisce la *mappa momento generalizzata* come il morfismo di fasci

$$\Pi : \overset{1}{\Lambda}_1 \longrightarrow \overset{1}{\Lambda}_2 : \alpha \longmapsto p(h(d\alpha))$$

e la *mappa di Poincaré–Cartan generalizzata* come il morfismo di fasci

$$\Xi : \overset{1}{\Lambda}_1 \longrightarrow \overset{1}{\Lambda}_2 : \alpha \longmapsto \alpha + p(h(d\alpha)). \quad \square$$

**Osservazione 1.4.1** Si hanno le seguenti espressioni in coordinate

$$\Pi(\alpha) = ((\partial_i^0 \alpha_0 - \partial_0 \alpha_i^0) + (\partial_i^0 \alpha_j - \partial_j \alpha_i^0) y_0^j + (\partial_i^0 \alpha_j^0 - \partial_j^0 \alpha_i^0) y_{00}^j) \theta^i$$

e

$$\begin{aligned} \Xi(\alpha) = & (\alpha_0 + \alpha_i y_0^i) d^0 + \\ & (\alpha_i + (\partial_i^0 \alpha_0 - \partial_0 \alpha_i^0) + (\partial_i^0 \alpha_j - \partial_j \alpha_i^0) y_0^j + (\partial_i^0 \alpha_j^0 - \partial_j^0 \alpha_i^0) y_{00}^j) \theta^i + \\ & \alpha_i^0 d_0^i. \quad \square \end{aligned}$$

**Proposizione 1.4.2** *Il morfismo di fasci  $\Xi$  passa al quoziente  $\overset{1}{\Lambda}_1 / \overset{1}{\Theta}_1$ , producendo il morfismo di fasci iniettivo*

$$[\Xi] : \overset{1}{\Lambda}_1 / \overset{1}{\Theta}_1 \longrightarrow \overset{1}{\Lambda}_2 : [l] \longmapsto l + p(h(dl)).$$

DIMOSTRAZIONE.  $[\Xi]$  passa al quoziente poiché, per ogni  $c \in \overset{1}{\Theta}_1$ , si ha

$$c + p(h(dc)) = c - c = 0.$$

Inoltre,  $[\Xi]$  è iniettivo poiché, per ogni  $l \in \overset{1}{\Lambda}_1$ ,

$$l + p(h(dl)) = 0 \Rightarrow l \in \overset{1}{\Theta}_1. \quad \square \text{ QED}$$

Si consideri la successione esatta

$$0 \longrightarrow \overset{1}{\Theta}_1 \longrightarrow \overset{1}{\Lambda}_1 \longrightarrow \overset{1}{\mathcal{H}}_2^A \longrightarrow 0. \quad (1.4)$$

Si potrebbe sperare di decomporre tale successione usando le mappe  $[\Xi]$  e  $v$ . Tuttavia, i loro domini e codomini sono troppo vasti; d'altra parte, si può raggiungere tale obiettivo per mezzo di un'opportuna restrizione della successione.

**Teorema 1.4.1** *La successione*

$$0 \longrightarrow \overset{1}{\Theta}_1 \longrightarrow \overset{1}{\mathcal{H}}_{(1,0)} \longrightarrow \overset{1}{\mathcal{H}}_1 \longrightarrow 0$$

è la massima sottosuccessione di (1.4) che si decompone per mezzo di  $v$  secondo

$$0 \longrightarrow \overset{1}{\mathcal{H}}_1 \longrightarrow \overset{1}{\mathcal{H}}_{(1,0)} \xrightarrow{v} \overset{1}{\Theta}_1 \longrightarrow 0$$

ed è la massima sottosuccessione di (1.4) che si decompone per mezzo di  $\Xi$  secondo

$$0 \longrightarrow \overset{1}{\mathcal{H}}_1 \xrightarrow{\Xi} \overset{1}{\mathcal{H}}_{(1,0)} \longrightarrow \overset{1}{\Theta}_1 \longrightarrow 0.$$

Si definisce il sottofascio

$$\mathcal{P} := \Xi(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{H}_{(1,0)}.$$

Le mappe

$$h : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{H}_1, \quad \Xi : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{P}$$

sono isomorfismi di fascio, e sono l'uno inverso dell'altro.

### 1.4.b La colonna dinamica

Si può interpretare la proiezione sul quoziente in termini di  $h$ , mediante i risultati seguenti.

**Osservazione 1.4.2** La mappa data dalla composizione

$$\overset{2}{\Lambda}_1 \hookrightarrow \overset{2}{\mathcal{H}}_{(2,1)} \xrightarrow{h} \overset{1}{\mathcal{C}}_2 \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_2$$

non passa al quoziente  $\overset{2}{\Lambda}_1/\overset{2}{\Theta}_1$  poiché  $\overset{2}{\Theta}_1 \neq \overset{2}{\mathcal{C}}_1$ .  $\square$

Perciò, è interessante trovare il massimo sottofascio di  $\overset{2}{\Lambda}_1$  tale che la restrizione di  $h$  passa al quoziente.

**Teorema 1.4.2** *Il massimo sottofascio  $\mathcal{D} \subset \overset{2}{\Lambda}_1$ , tale che la mappa data dalla composizione*

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \overset{2}{\Lambda}_1 \hookrightarrow \overset{2}{\mathcal{H}}_{(2,1)} \xrightarrow{h} \overset{1}{\mathcal{C}}_2 \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_2$$

*passa al quoziente  $\overset{2}{\Lambda}_1/\overset{2}{\Theta}_1$ , è*

$$\mathcal{D} = \ker p \circ h.$$

*L'espressione in coordinate di  $\omega \in \mathcal{D}$  è del tipo*

$$\omega = 2(\omega_{i0} + \omega_{ij}^0 y_{00}^j) \theta^i \wedge d^0 + \omega_{ij} \theta^i \wedge \theta^j + 2\omega_{ij}^0 \theta_0^i \wedge \theta^j,$$

*ove  $\omega_{i0}, \omega_{ij}^0, \omega_{ij} \in \overset{0}{\Lambda}_1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\omega, \omega' \in \overset{2}{\Lambda}_1$ ; allora,  $[\omega] = [\omega']$  se e solo se  $\omega' = \omega + c + dc'$ , con  $c \in \overset{2}{\mathcal{C}}_{(1,0)}, c' \in \overset{1}{\mathcal{C}}_{(1,0)}$ .

- Si ha  $\ker coh \subset \mathcal{D}$ . Infatti,  $p(h(\omega)) = p(h(\omega')) = 0$  e  $[\omega'] = [\omega]$ . Allora,  $p(h(dc')) = 0$ , quindi  $h(dc') = 0$ , quindi  $h(\omega') = h(\omega)$ .

- Si ha  $\mathcal{D} \subset \ker coh$ . Infatti, sia  $\omega \in \ker coh$  tale, che  $[\omega'] = [\omega]$  e  $h(\omega') = h(\omega)$ . Allora,  $h(dc') = 0$ , quindi  $p(h(dc')) = 0$ , quindi  $p(h(\omega')) = 0$ .  $\square$

**Corollario 1.4.1** *La mappa data dalla composizione*

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \overset{2}{\Lambda}_1 \hookrightarrow \overset{2}{\mathcal{H}}_{(2,1)} \xrightarrow{h} \overset{1}{\mathcal{C}}_2 \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_1$$

dà l'isomorfismo di fasci

$$[h] : \mathcal{D}/\overset{2}{\Theta}_1 \longrightarrow \overset{1}{\mathcal{C}}_{(2,1)}^A \wedge \overset{1}{\mathcal{H}}_1 : [\omega] \longmapsto h(\omega).$$

Per  $\omega \in \mathcal{D}$ , si ha l'espressione in coordinate

$$[h] : [\omega] \longmapsto 2(\omega_{i0} + \omega_{ij}^0 y_{00}^j) \theta^i \wedge d^0.$$

**Osservazione 1.4.3** È interessante confrontare il risultato sopra ottenuto con il corollario 1.3.2. In particolare, il corollario precedente fornisce un sottofascio di  $\overset{2}{\Lambda}_1$  che produce, nel passaggio al quoziente, tutti e soli i morfismi di Eulero–Lagrange del secondo ordine.  $\square$

### 1.4.c Le colonne cinematica e dinamica

Il fascio  $\mathcal{D}$  soddisfa la seguente proprietà fondamentale.

**Teorema 1.4.3** *Sia  $\omega \in \mathcal{D}$  chiusa e sia  $\tau \in \overset{1}{\Lambda}_1$  un potenziale locale di  $\omega$ . Se  $\tau \in \overset{1}{\mathcal{H}}_{(1,0)}$ , Allora*

$$\tau \in \mathcal{P} \subset \overset{1}{\mathcal{H}}_{(1,0)}.$$

*D'altra parte*

$$d(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per quanto riguarda la prima proposizione, si ha  $\tau = h(\tau) + v(\tau)$ , e  $p \circ h(d\tau) = 0$ . Quindi,  $p \circ h(d(h(\tau) + v(\tau))) = 0$ . Ma si ha  $hd(v(\tau)) = d_h(v(\tau))$ , e, per una proprietà di  $p$ ,  $p \circ d_h(v(\tau)) = -v(\tau)$ . Inoltre,  $h(d(h(\tau))) = d(h(\tau))$  poiché  $\dim \mathbf{T} = 1$ . Quindi, si ottiene  $v(\tau) = p(d(h(\tau)))$ .

D'altra parte, si ha  $\lambda \in \overset{1}{\mathcal{H}}_1$ ,  $p \circ h(d(\lambda + p(h(d\lambda)))) = 0$ , che prova la seconda proposizione.  $\square$

**Corollario 1.4.2** *I seguenti diagrammi commutano*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P} & \xrightarrow{d} & \mathcal{D} \\
 \downarrow h & & \downarrow h \\
 {}^1\mathcal{H}_1 & \xrightarrow{E_1} & {}^1\mathcal{C}_{(2,1)}^A \wedge {}^1\mathcal{H}_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{P} & \xrightarrow{d} & \mathcal{D} \\
 \uparrow \Xi & & \downarrow h \\
 {}^1\mathcal{H}_1 & \xrightarrow{E_1} & {}^1\mathcal{C}_{(2,1)}^A \wedge {}^1\mathcal{H}_1
 \end{array}$$

**Corollario 1.4.3** *L'espressione in coordinate di  $E_1 : {}^1\mathcal{H}_1 \longrightarrow {}^1\mathcal{C}_{(2,1)}^A \wedge {}^1\mathcal{H}_1$  è*

$$E_1(\lambda_0 d^0) = (\partial_i \lambda_0 - (\pi_2)_0 \cdot \partial_i^0 \lambda_0) \theta^i \wedge d^0.$$

Il seguente risultato dà importanza ai precedenti sottodiagrammi.

**Teorema 1.4.4** [AnDu80] *La successione*

$${}^1\mathcal{H}_1 \xrightarrow{E_1} {}^1\mathcal{C}_{(2,1)}^A \wedge {}^1\mathcal{H}_1 \xrightarrow{E_2} \Lambda_3^3 / \Theta_3 \quad (1.5)$$

è esatta in  ${}^1\mathcal{C}_{(2,1)}^A \wedge {}^1\mathcal{H}_1$ .

#### 1.4.d Interpretazione meccanica del bicomplesso lagrangiano

Sia  $\lambda : J_1\mathbf{Y} \longrightarrow T^*\mathbf{X}$  una lagrangiana standard del primo ordine del calcolo delle variazioni. Si può verificare facilmente che il morfismo di Eulero–Lagrange standard  $\epsilon(\lambda) : J_2\mathbf{Y} \longrightarrow V^*\mathbf{Y} \otimes_{\mathbf{Y}} T^*\mathbf{X}$  associato con  $\lambda$  è la forma  $E_1(\lambda)$ . Perciò, si interpreta  ${}^1\mathcal{H}_1$  come il fascio delle *lagrangiane del primo ordine*,  ${}^1\mathcal{C}_{(2,1)}^A \wedge {}^1\mathcal{H}_1$  come il fascio delle *forme di Eulero–Lagrange*,  $E_1$  come l'*operatore di Eulero–Lagrange*. Analogamente, si può interpretare  $E_2$  in termini dell'operatore di Helmholtz standard del calcolo delle variazioni.

Perciò, si possono interpretare gli altri oggetti che emergono nel bicomplesso lagrangiano. Secondo questa interpretazione, data una lagrangiana  $\lambda \in {}^1\mathcal{H}_1$ , la forma  $\Pi(\lambda) \in \Theta_1$  è detta *forma momento della lagrangiana* e  $\Xi(\lambda) \in \mathcal{P}$  è detta *forma di Poincaré–Cartan della lagrangiana*.

Nell'approccio diretto al formalismo lagrangiano, si parte da una lagrangiana  $\lambda \in {}^1\mathcal{H}_1$  e si riempiono i vertici del bicomplesso lagrangiano (seguendo le direzioni basso–alto, sinistra–destra) per mezzo delle mappe  $\Xi, d, h$ . Si confronti questo approccio con gli approcci standard alla forma di Poincaré–Cartan [Cos94, Fer83, FeFr82, GaMu82, Gar74, GoSt73, HoKo82, Kol83, Kru73, Kru83, MaMo83b, Sau89], e con l'approccio della formulazione geometrica del principio di minima azione (appendice A.8).

Nell'approccio diretto al formalismo lagrangiano, si parte da un morfismo di Eulero–Lagrange  $\epsilon \in {}^1\mathcal{C}_{(2,1)}^A \wedge {}^1\mathcal{H}_1$  e si cerca, sotto le condizioni di chiusura di Helmholtz, una

lagrangiana locale, che è definita a meno del differenziale orizzontale di una funzione su  $\mathbf{Y}$ . Chiaramente, questa forma permette di riempire i vertici come nel caso diretto; ma in questo caso, tutti gli oggetti della prima colonna sono deefiniti a meno di un gauge.

In particolare, non è conosciuto nessun morfismo naturale  $\mathcal{C}_{(2,0)}^A \wedge \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{D}$ , analogo a  $\Xi$ , che permetta di muoversi verso l'alto in maniera univoca nella colonna delle 2-forms. Nella letteratura (si veda, per esempio, [Gia92, MaPa91, MaPa94, Sau89]) tale mappa può essere trovata sotto ipotesi addizionali sulla struttura della varietà fibrata.

Nel capitolo 2 si vedrà come lo schema di interpretazione del problema inverso si adatterà alla formulazione della meccanica lagrangiana in relatività galileiana.

Si noti che l'interpretazione meccanica del bicomplexo lagrangiano può essere facilmente estesa alle lagrangiane del secondo ordine generalizzate  $\lambda \in \mathcal{V}_1$ ; Krupka ha dimostrato che  $E_1(\mu)$  è proprio l'operatore di Eulero-Lagrange standard del terzo ordine associato alla lagrangiana affine del secondo ordine  $\mu \in \mathcal{H}_2^A$ , come si è visto nelle precedenti sezioni.

**PARTE II**  
**STRUTTURE RELATIVISTICHE**  
**CLASSICHE**

## CAPITOLO 2

# STRUTTURE DELLA RELATIVITÀ GENERALE CLASSICA GALILEIANA

In questo capitolo sono sviluppate la teoria dei campi gravitazionale ed elettromagnetico classica e la meccanica classica in relatività generale galileiana. La presentazione è basata sulla formulazione di [JaMo93a], [JaMo93b], ma presenta aspetti originali sia per quanto riguarda la teoria dei campi, ove viene studiato lo spazio-tempo galileiano sfericamente simmetrico [Vit95a], [Vit95b], sia per quanto riguarda la meccanica classica di una particella, in cui l'applicazione dei risultati del capitolo 1 porta ad interessanti conseguenze [MoVi95].

Per convenzione la lettera  $\mathbf{G}$  indicherà assiomi la cui validità è generale nell'ambito della teoria galileiana; gli assiomi indicati con altre lettere sono assiomi che vengono soddisfatti da particolari soluzioni esatte.

## 2.1 Spazio-tempo

In questa sezione sono dati gli assiomi per le strutture fondamentali della relatività generale galileiana, e cioè spazi di unità di misura e costanti fondamentali, spazio-tempo, metrica verticale, connessione spazio-tempo.

### 2.1.a Unità di misura

Si assumono i seguenti semi-spazi vettoriali di dimensione 1:

$\mathbb{T}$  , lo spazio vettoriale orientato di dimensione 1 delle *unità di tempo*;

$\mathbb{L}$  , lo spazio positivo delle *unità di lunghezza*;

$\mathbb{M}$  , lo spazio positivo delle *unità di massa*.

Il seguente semi-spazio vettoriale

$$\bigoplus_{r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}} \mathbb{T}^{r_1} \otimes \mathbb{L}^{r_2} \otimes \mathbb{M}^{r_3} ,$$

ove  $\mathbb{Q}$  è l'insieme dei numeri razionali, è detto algebra tensoriale delle unità di misura. Se  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}$ , allora il semi-spazio vettoriale di dimensione 1  $\mathbb{T}^{r_1} \otimes \mathbb{L}^{r_2} \otimes \mathbb{M}^{r_3}$  è detto *spazio di unità con dimensioni*  $(r_1, r_2, r_3)$ .

Un campo tensoriale a valori in uno spazio di unità è detto *scalato*. Si noti che le operazioni sui campi tensoriali (contrazioni, derivate di Lie, derivate covarianti, ecc.) si estendono in modo naturale ad operazioni sui campi tensoriali scalati.

Si assumono, inoltre, le seguenti costanti fondamentali:

- la *costante di Planck*

$$\hbar \in (\mathbb{T}^+)^* \otimes \mathbb{L}^2 \otimes \mathbb{M} ;$$

- la *costante di accoppiamento gravitazionale*

$$\kappa \in \mathbb{T}^{*2} \otimes \mathbb{L}^3 \otimes \mathbb{M}^* .$$

Lo spazio  $\mathbb{Q} := \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}$  è detto *spazio delle cariche*.

Si assume che una *particella* sia rappresentata da una coppia costituita da una massa e da una carica, ossia una coppia  $(m, q) \in \mathbb{M} \times \mathbb{Q}$ .

## 2.1.b Spazio-tempo

**Assioma G.1** Si assume che lo *spazio-tempo* sia una varietà fibrata

$$t : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T} ,$$

dove  $\mathbf{E}$  è una varietà orientabile di dimensione 4 e  $\mathbf{T}$  è uno spazio affine di dimensione 1 associato allo spazio vettoriale  $\mathbb{T}$ . □

Si ha la forma differenziale naturale  $dt : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T} \otimes T^* \mathbf{E}$ .

Un elemento positivamente orientato  $u_0 \in \mathbb{T}^+$ , o, equivalentemente,  $u^0 \in \mathbb{T}^{+*}$ , è detto *unità di tempo*. Una coppia  $(\tau_0, u_0) \in \mathbf{T} \times \mathbb{T}^+$  fornisce la coordinata affine  $\tilde{x}^0 : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{R} : \tau \longrightarrow (\tau - \tau_0)_0$  su  $\mathbf{T}$ .

Si denota con  $(x^0, y^i)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , una carta su  $\mathbf{E}$  adattata alla fibrazione  $t$  e ad una coordinata affine  $\tilde{x}^0$  su  $\mathbf{T}$ ; ciò significa che  $x^0$  coincide localmente con il pullback di  $\tilde{x}^0$ . Data una unità di tempo  $u_0 \in \mathbb{T}^+$ , si dice che una carta  $(x^0, y^i)$  su  $\mathbf{E}$  è adattata ad  $u_0$  se essa è adattata ad una coordinata affine indotta da  $(\tau_0, u_0) \in \mathbf{T} \times \mathbb{T}^+$ .

Per quanto riguarda le espressioni in coordinate verrà usata la seguente convenzione: gli indici latini  $i, j, \dots$  vanno da 1 a 3 e indicano coordinate sulla fibra, l'indice 0 è riservato alla coordinata su  $\mathbf{T}$ , e gli indici greci  $\lambda, \mu, \dots$  indicano coordinate sia sulla fibra sia sulla base, quindi  $0 \leq \lambda, \mu, \dots \leq 3$ . Le altre convenzioni (coordinate sugli spazi tangenti, sui getti, ecc.) sono quelle date nell'appendice A.6. Ad esempio, si ha l'espressione in coordinate  $dt = u_0 \otimes d^0$ .

**Definizione 2.1.1** Una sezione  $s : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{E}$  è detta *moto*. Se  $s$  è un moto, la sezione  $j_1s : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{E}$  è detta *velocità assoluta* di  $s$ .  $\square$

L'espressione in coordinate della velocità assoluta di un moto  $s$  è  $y_0^i \circ j_1s = \partial_0 s^i$ .

**Definizione 2.1.2** Una sezione

$$o : \mathbf{E} \longrightarrow J_1\mathbf{E} \subset \mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{E}$$

è detta *osservatore*.  $\square$

L'espressione in coordinate di un osservatore  $o$  è

$$o = u^0 \otimes (\partial_0 + o_0^i \partial_i).$$

Una carta fibrata  $(x^0, y^i)$  è detta *adattata ad un osservatore*  $o$  se  $o = u^0 \otimes \partial_0$ , ossia se  $o_0^i = 0$ .

**Osservazione 2.1.1** Esiste una corrispondenza biunivoca fra osservatori  $o$  e flussi locali di isomorfismi fibrati  $\psi_o$  del tipo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times \mathbf{E} & \xrightarrow{\psi_o} & \mathbf{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T} \times \mathbf{T} & \xrightarrow{+} & \mathbf{T} \end{array}$$

Infatti, dato un osservatore  $o$ , un flusso è generato dalle soluzioni dell'equazione  $o \circ s = j_1s$ ; il viceversa è banale. (Si veda anche [Mod71].)  $\square$

Alla luce di quanto detto sopra, il seguente risultato è di immediata dimostrazione.

**Lemma 2.1.1** Sia  $(x^0, y^i)$  una carta su  $\mathbf{E}$  adattata ad un osservatore  $o$ , e sia  $(x^{0'}, y^{i'})$  una carta fibrata su  $\mathbf{E}$  con lo stesso dominio di  $(x^0, y^i)$ . Allora  $(x^{0'}, y^{i'})$  è adattata ad  $o$  se e solo se

$$\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^0} = 0.$$

Un osservatore  $o$  è detto *completo* se il suo flusso  $\psi_o$  è definito globalmente.

**Osservazione 2.1.2** Dato un punto  $e \in \mathbf{E}$ , esistono carte in un intorno di  $e$  adattate ad  $o$ . Una carta adattata a  $o$  è costruita localmente mediante  $\psi_o$ , identificando punti sull'immagine di una stessa sezione, ottenendo un insieme localmente diffeomorfo alla fibra. Viceversa, ogni carta fibrata determina univocamente un osservatore locale, rispetto al quale è adattata, per mezzo della decomposizione locale  $\mathbf{E} \simeq \mathbf{T} \times \mathbf{P}$  relativa alla carta.  $\square$

**Osservazione 2.1.3** Si può provare che, se  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  è un fibrato, allora c'è una corrispondenza biunivoca fra osservatori completi e decomposizioni di  $\mathbf{E}$  in un fibrato prodotto  $\mathbf{T} \times \mathbf{P}$ , nel modo sopra specificato. L'esistenza di osservatori completi è dovuta al teorema che stabilisce la banalità dei fibrati su una base contraibile [Ste51, p.53].

È anche facile vedere che  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  è un fibrato se e solo se esiste un osservatore completo su  $\mathbf{E}$ .  $\square$

Le precedenti osservazioni implicano che una coppia  $(u_0, o)$ , ove  $u_0$  è una unità di tempo, permette di definire localmente in modo univoco lo spazio delle posizioni, e di misurare gli intervalli di tempo.

D'ora in poi, quando è dato un osservatore verranno usate sempre carte adattate all'osservatore, a meno che non sia indicato diversamente.

**Osservazione 2.1.4** Un osservatore  $o$  è anche una connessione su  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  (appendice A.7). Sarà di particolare interesse l'inclusione fibrata  $(\vartheta \circ o)^* : V^* \mathbf{E} \hookrightarrow T^* \mathbf{E}$  indotta da  $o$ , che ha espressione in coordinate (non adattate ad  $o$ )  $\check{d}^j \longmapsto d^j - o_0^j d^0$ .

Si ha anche il morfismo fibrato di traslazione

$$\nabla[o] : J_1 \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes V \mathbf{E} : \sigma \longmapsto \nabla[o](\sigma) := \sigma - o \circ \pi_1^0(\sigma) . \quad \square \quad (2.1)$$

**Definizione 2.1.3** Siano  $s$  un moto,  $o$  un osservatore. Allora la sezione

$$\nabla[o]s := \nabla[o] \circ j_1 s : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes V \mathbf{E}$$

è detta velocità di  $s$  relativa ad  $o$ .  $\square$

Si noti che, in coordinate adattate, l'espressione della velocità di  $s$  relativa ad  $o$  è  $\nabla[o]s = \partial_0 s^i u^0 \otimes \partial_i$ . Pertanto, mentre non ha senso parlare di velocità assoluta nulla di un moto a causa della struttura affine di  $J_1 \mathbf{E}$ , ha senso parlare di velocità nulla di un moto relativamente ad un osservatore.

Siano  $o$  e  $o'$  due osservatori. Allora, mediante la differenza  $v := o' - o : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes V \mathbf{E}$  si può esprimere la formula usuale per le velocità relative:

$$\nabla[o'] = \nabla[o] - v ,$$

### 2.1.c Metrica verticale

**Assioma G.2** Si assume una *metrica verticale scalata Riemanniana* sullo spazio-tempo

$$g : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{L}^2 \otimes (V^* \mathbf{E} \otimes_{\mathbf{E}} V^* \mathbf{E}) . \quad \square$$

Quindi, ogni fibra di  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  è dotata di una metrica scalata Riemanniana. Si denota con

$\bar{g} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{L}^{-2} \otimes (V\mathbf{E} \otimes V\mathbf{E})$  la metrica controvariante corrispondente a  $g$ ;

$g^\flat : V\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{L}^2 \otimes V^*\mathbf{E}$  e  $g^\sharp : V^*\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{L}^{-2} \otimes V\mathbf{E}$  gli isomorfismi metrici naturali;

$\eta : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{L}^3 \otimes \overset{3}{\wedge} V^*\mathbf{E}$  la forma volume scalata verticale indotta da  $g$ , da  $t$  e dall'orientazione;

$v : \mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{T} \otimes \mathbb{L}^3) \otimes \overset{4}{\wedge} T^*\mathbf{E}$  la forma volume scalata su  $\mathbf{E}$  indotta da  $g$  e dall'orientazione;

$\varkappa : V\mathbf{E} \longrightarrow V^*\mathbf{E} \otimes VV\mathbf{E}$  la connessione Riemanniana indotta da  $g$  sulle fibre di  $t : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$ .

Si hanno le espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} g &= g_{ij} \check{d}^i \otimes \check{d}^j, \quad g_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{E}, \mathbb{L}^\epsilon \otimes \mathcal{R}), \\ \bar{g} &= g^{hk} \partial_h \otimes \partial_k, \quad g^{hk} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{E}, \mathbb{L}^{\epsilon*} \otimes \mathcal{R}); \\ \eta &= \sqrt{|g|} \check{d}^1 \wedge \check{d}^2 \wedge \check{d}^3, \quad v = \sqrt{|g|} u_0 \otimes d^0 \wedge d^1 \wedge d^2 \wedge d^3; \\ \varkappa &= \check{d}^j \otimes (\partial_j + \varkappa_{jh}^i y^h \partial_i). \end{aligned}$$

### 2.1.d Connessione spazio-temporale

In questa sottosezione è introdotto il concetto di connessione spazio-temporale. La teoria delle connessioni sarà costantemente impiegata a tal fine; si veda l'appendice A.7 per un riepilogo dei principali risultati e per le notazioni impiegate. Nella sottosezione G.3 verrà postulata la connessione gravitazionale.

Una connessione spazio-temporale può essere definita in due modi equivalenti. Il seguente teorema fornisce la corrispondenza fra le due definizioni [JaMo95].

**Teorema 2.1.1** *Per ogni connessione lineare  $K$  su  $T\mathbf{E}$  la mappa*

$$\nu_\Gamma = \vartheta \circ \nu_K \circ T\mathcal{A}$$

*data dal diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc} T J_1 \mathbf{E} & \xrightarrow{\nu_\Gamma} & V J_1 \mathbf{E} \xrightarrow{\cong} J_1 \mathbf{E} \times_{\mathbf{E}} (\mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E}) \\ \downarrow (\pi_{J_1 \mathbf{E}}, T\mathcal{A}) & & \downarrow (\text{id}_{J_1 \mathbf{E}} \times \vartheta) \\ J_1 \mathbf{E} \times_{\mathbf{E}} T(\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{E}) & \xrightarrow{(\text{id}_{J_1 \mathbf{E}} \times \nu_K)} & J_1 \mathbf{E} \times_{\mathbf{E}} (\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{E}) \end{array}$$

*fornisce una connessione  $\Gamma$  su  $J_1 \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ . Ciò definisce un morfismo affine  $\chi : K \longmapsto \Gamma$  tra i seguenti spazi affini (di dimensione infinita):*

1. lo spazio delle connessioni lineari  $K$  su  $T\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ ;
2. lo spazio delle connessioni  $\Gamma$  su  $J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ .

Se l'espressione in coordinate di  $K$  è

$$K = d^\lambda \otimes (\partial_\lambda + (K_{\lambda i}^\nu \dot{y}^i + K_{\lambda 0}^\nu \dot{x}^0) \partial_\nu) ,$$

allora l'espressione in coordinate di  $\Gamma = \chi(K)$  è

$$\Gamma = d^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma_{\lambda 0}^i \partial_i) ,$$

con

$$\Gamma_{\lambda 0}^i = K_{\lambda}^i x_0^j + K_{\lambda}^i{}_{0} - x_0^i (K_{\lambda}^0{}_j x_0^j + K_{\lambda}^0{}_0) .$$

Il morfismo affine  $\chi$  induce una corrispondenza fra le curvature delle connessioni, secondo quanto segue.

**Teorema 2.1.2** *Se  $K$  è una connessione lineare su  $T\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ , e se  $\Gamma = \chi(K)$ , allora*

$$R[\Gamma] = \vartheta \circ R[K] \circ \mathfrak{d} ,$$

secondo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} J_1\mathbf{E} \times_{\mathbf{E}} \mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{E} & \xrightarrow{\text{id}_{J_1\mathbf{E}} \times R[K]} & J_1\mathbf{E} \times_{\mathbf{E}} (\wedge^2 \mathbb{T}^* \mathbf{E} \otimes_{\mathbf{E}} \mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{E}) \\ \uparrow (\text{id}_{J_1\mathbf{E}}, \mathfrak{d}_1) & & \downarrow \vartheta_1 \\ J_1\mathbf{E} & \xrightarrow{R[\Gamma]} & \wedge^2 \mathbb{T}^* \mathbf{E} \otimes_{\mathbf{E}} \mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E} \end{array}$$

Si ha l'espressione in coordinate

$$\begin{aligned} (R[\Gamma])_{\lambda\mu}^i &= (R[K])_{\lambda\mu}^i x_0^j + (R[K])_{\lambda\mu}^i{}_{0} + \\ &\quad - x_0^i ((R[K])_{\lambda\mu}^0{}_j x_0^j + (R[K])_{\lambda\mu}^0{}_0) . \end{aligned}$$

Si dice che una connessione lineare  $K$  preserva la fibrazione  $t$  se  $\nabla^K(dt) = 0$ ; in coordinate,  $K_{\lambda\mu}^0 = 0$ .

**Corollario 2.1.1** *Se  $K$  è una connessione lineare su  $T\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  che preserva la fibrazione, allora  $\Gamma = \chi(K)$  è affine.*

*Inoltre, la restrizione di  $\chi$  al sottospazio affine delle connessioni  $K$  che preservano la fibrazione è una biezione a valori nello spazio affine delle connessioni affini su  $J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  [JaMo93a], [JaMo93b].*

**Corollario 2.1.2** *Se  $K$  è una connessione lineare su  $T\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  senza torsione e che preserva la fibrazione, allora  $\Gamma = \chi(K)$  è affine e senza torsione rispetto alla forma di saldatura  $\vartheta$  (appendice A.7).*

**Definizione 2.1.4** Una connessione  $K$  lineare su  $T\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  senza torsione e che preserva la fibrazione, o equivalentemente una connessione affine senza torsione  $\Gamma = \chi(K)$ , è detta *connessione spazio-temporale*.  $\square$

Una connessione spazio-temporale  $K : T\mathbf{E} \longrightarrow T^*\mathbf{E} \otimes_{T\mathbf{E}} TT\mathbf{E}$  è caratterizzata dall'espressione in coordinate

$$K = d^\lambda \otimes (\partial_\lambda + (K_{\lambda h}^i y^h + K_{\lambda 0}^i \dot{x}^0) \partial_i),$$

con  $K_{\lambda\mu}^i = K_{\mu\lambda}^i$  e  $K_{\lambda\mu}^0 = 0$ . Una connessione spazio-temporale  $\Gamma : J_1\mathbf{E} \longrightarrow T^*\mathbf{E} \otimes_{J_1\mathbf{E}} TJ_1\mathbf{E}$  è caratterizzata dall'espressione in coordinate

$$\Gamma = d^\lambda \otimes (\partial_\lambda + (\Gamma_{\lambda h}^i y_0^h + \Gamma_{\lambda 0}^i) \partial_i),$$

con  $\Gamma_{\lambda\mu}^i = \Gamma_{\mu\lambda}^i$  e  $\Gamma_{\lambda\mu}^0 = 0$ . La biezione  $\chi$  è data in coordinate da

$$K_{\lambda\mu}^i = \Gamma_{\lambda\mu}^i.$$

D'ora in avanti una connessione spazio-temporale su  $T\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  verrà indicata sempre con la lettera  $K$ , e una connessione spazio-temporale su  $J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  verrà indicata con la lettera  $\Gamma$ .

Si hanno le seguenti restrizioni di una connessione spazio-temporale  $K$ :

$K' := K|_{V\mathbf{E}} : V\mathbf{E} \longrightarrow T^*\mathbf{E} \otimes_{T\mathbf{E}} TV\mathbf{E}$ , che è la restrizione in dominio di  $K$ , con espressione in coordinate

$$K' = d^\lambda \otimes (\partial_\lambda + K_{\lambda h}^i y^h \partial_i).$$

$K'$  è una connessione lineare su  $V\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ .

$K^v : T\mathbf{E} \longrightarrow V^*\mathbf{E} \otimes_{T\mathbf{E}} VV\mathbf{E}$ , che è la restrizione in codominio di  $K$ , con espressione in coordinate

$$K^v = \check{d}^j \otimes (\partial_j + (K_{jh}^i y^h + K_{j0}^i \dot{x}^0) \partial_i).$$

$K^v$  è una famiglia di connessioni lineari su  $(T\mathbf{E})_\tau \longrightarrow \mathbf{E}_\tau$  parametrizzata da  $\tau \in \mathbf{T}$ ;

$\check{K} : V\mathbf{E} \longrightarrow V^*\mathbf{E} \otimes_{T\mathbf{E}} VV\mathbf{E}$ , che è la restrizione in dominio e codominio di  $K$ , con espressione in coordinate

$$\check{K} = \check{d}^j \otimes (\partial_j + K_{jh}^i y^h \partial_i).$$

$\check{K}$  è una connessione sulle fibre di  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$ .

Si ricordi che  $J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  è un fibrato affine associato al fibrato vettoriale  $\mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ , e che  $J_{1\mathbf{E}}J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  è un fibrato affine associato al fibrato vettoriale  $J_{1\mathbf{E}}(\mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E}) \longrightarrow \mathbf{E}$ . Dunque, una connessione spazio-temporale  $\Gamma$  induce i seguenti morfismi fibrati.

$D\Gamma : \mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E} \longrightarrow T^*\mathbf{E} \otimes_{\mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E}} T(\mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E})$ , che è la derivata lungo le fibre del morfismo di fibrato affine  $\Gamma$  (appendice A.7). Una contrazione naturale dà l'identificazione  $D\Gamma = K'$ ; pertanto, vale l'espressione in coordinate

$$D\Gamma = d^\lambda \otimes (\partial_\lambda + \Gamma_{\lambda h}^i \dot{y}^h \partial_i) ;$$

$\Gamma^v : J_1\mathbf{E} \longrightarrow V^*\mathbf{E} \otimes_{T\mathbf{E}} VV\mathbf{E}$ , che è la restrizione in codominio di  $\Gamma$ , con espressione in coordinate

$$\Gamma^v = \check{d}^j \otimes (\partial_j + (\Gamma_{jh}^i \dot{y}^h + \Gamma_{j0}^i \dot{x}^0) \partial_i) .$$

$\Gamma^v$  è una famiglia di connessioni affini su  $(J_1\mathbf{E})_\tau \longrightarrow \mathbf{E}_\tau$  parametrizzata da  $\tau \in \mathbf{T}$ ;

$D\Gamma^v : \mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E} \longrightarrow V^*\mathbf{E} \otimes_{\mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E}} V(\mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E})$ , che è la derivata lungo le fibre del morfismo di fibrato affine  $\Gamma^v$  (appendice A.7). Una contrazione naturale dà l'identificazione  $D\Gamma^v = \check{K}$ ; pertanto, vale l'espressione in coordinate

$$D\Gamma^v = \check{d}^j \otimes (\partial_j + \Gamma_{jh}^i \dot{y}^h \partial_i) .$$

Un terzo modo di dare una connessione spazio-temporale è evidenziato nel teorema seguente.

**Teorema 2.1.3** *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle connessioni spazio-tempo  $\Gamma$  e l'insieme delle connessioni del secondo ordine polinomiali di secondo grado (rispetto alla struttura affine di  $J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ )  $\gamma$  su  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  (si veda l'appendice A.6).*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, sia  $\Gamma$  una connessione spazio-temporale. Il morfismo fibrato

$$\gamma := \mathfrak{d} \lrcorner \Gamma : J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T J_1\mathbf{E}$$

è a valori nel sottofibrato  $J_2\mathbf{E} \subset \mathbb{T}^* \otimes T J_1\mathbf{E}$ , dunque è una connessione del secondo ordine (vedere appendice A.6). Inoltre, dall'espressione in coordinate

$$\gamma = u^0 \otimes (\partial_0 + y_0^i \partial_i + \gamma^i \partial_i^0) ,$$

ove

$$\gamma^i := \Gamma_{hk}^i y_0^h y_0^k + 2\Gamma_{h0}^i y_0^h + \Gamma_{00}^i ,$$

si vede che  $\gamma^i$  è un polinomio del secondo ordine nelle coordinate  $y_0^i$ .

La corrispondenza  $\Gamma \mapsto \gamma$  è iniettiva. Usando una partizione dell'unità si può facilmente dimostrare la suriettività.

□

La connessione  $\gamma$  è detta *connessione del secondo ordine* associata alla connessione spazio-temporale  $\Gamma$ .  $\gamma$  induce il seguente morfismo fibrato di traslazione

$$\nabla[\gamma] : J_2\mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{T}^*) \otimes V\mathbf{E} : \sigma_2 \longmapsto \sigma_2 - \gamma(\pi_1^2(\sigma_2)) .$$

Pertanto, tramite la connessione  $\gamma$  è possibile definire l'accelerazione di un moto.

**Definizione 2.1.5** Sia  $\Gamma$  una connessione spazio-temporale, e sia  $s$  un moto. Allora il morfismo fibrato

$$\nabla[\gamma]s := \nabla[\gamma] \circ j_2s : \mathbf{T} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{T}^*) \otimes V\mathbf{E}$$

è detto *accelerazione di  $s$  rispetto alla connessione  $\gamma$* . □

Si ha l'espressione in coordinate

$$\nabla[\gamma]s = (\partial_{00}s^i - \gamma^i \circ j_1s) u^0 \otimes u^0 \otimes (\partial_i \circ s)$$

La connessione  $\gamma$  sarà di fondamentale importanza nello studio del moto delle particelle.

Se  $o$  è un osservatore e  $K$  è una connessione spazio-temporale, tenendo conto dell'inclusione  $V^*\mathbf{E} \hookrightarrow T^*\mathbf{E}$  fornita dall'osservatore, abbiamo la seguente decomposizione:

$$(\nabla[K]o)^{\flat} = \frac{1}{2}(\Sigma + \Phi)$$

ove

$$\Sigma : \mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2) \otimes \odot^2 T^*\mathbf{E} , \quad \Phi : \mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2) \otimes \wedge^2 T^*\mathbf{E} ,$$

con espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} \Sigma &= -2u^0 \otimes (\Gamma_{0j0}d^0 \odot d^j + \Gamma_{ij0}d^i \odot d^j) , \\ \Phi &= -2u^0 \otimes (\Gamma_{0j0}d^0 \wedge d^j + \Gamma_{ij0}d^i \wedge d^j) . \end{aligned}$$

**Proposizione 2.1.1** *Sia  $o$  un osservatore. Allora la corrispondenza*

$$K \longmapsto (\check{K}, \check{\Sigma}, \Phi)$$

è una funzione biunivoca tra l'insieme delle connessioni spazio-tempo e l'insieme delle terne in cui il primo elemento è una connessione lineare senza torsione sulle fibre di  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$ , il secondo elemento è una 2-forma simmetrica del tipo

$$\alpha : \mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2) \otimes \odot^2 V^* \mathbf{E} ,$$

e il terzo elemento è una 2-forma del tipo

$$\beta : \mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2) \otimes \wedge^2 T^* \mathbf{E} .$$

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, è chiaro che la funzione è iniettiva. Inoltre, tenendo conto della Proposizione 2.1.1, se  $K$  è una connessione spaziotempo e  $(x^0, y^i)$  e  $(x^{0'}, y^{i'})$  sono due sistemi di coordinate adattate ad  $o$ , abbiamo le seguenti formule per il cambiamento di coordinate:

$$K_{i'j'o'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} K_{ij0} , \quad K_{0'j'o'} = \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} K_{0j0} .$$

Quindi, siano  $H$  una connessione lineare senza torsione sulle fibre di  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$ ,  $\alpha$  una 2-forma simmetrica come nell'enunciato,  $\beta$  una 2-forma come nell'enunciato. Sfruttando l'inclusione  $V^* \mathbf{E} \hookrightarrow T^* \mathbf{E}$  (osservazione 2.1.4) e la decomposizione  $T\mathbf{E} = \mathbb{T} \oplus V\mathbf{E}$  indotte da  $o$ , la coppia  $(H, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^\sharp)$ , è una connessione spazio-temporale; da cui la suriettività della funzione.  $\square$

**Definizione 2.1.6** Sia  $K$  una connessione spazio-temporale. Un osservatore  $o$  si dice *inerziale* rispetto a  $K$  se  $\nabla[K]o = 0$ .  $\square$

Naturalmente, non è detto che esistano osservatori inerziali.

**Definizione 2.1.7** Sia  $K$  una connessione spazio-temporale.  $K$  si dice *metrica* se  $\nabla[K']g = 0$ .  $\square$

Seguono facilmente dalla definizione le seguenti caratterizzazioni di una connessione spazio-temporale metrica.

**Lemma 2.1.2** *Sia  $K$  una connessione spazio-temporale. Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti.*

1.  $\nabla[K']g = 0$ ;
2. in coordinate, si ha  $\partial_\lambda g_{ij} + K_{\lambda i}^h g_{hj} + K_{\lambda j}^h g_{ih} = 0$ ;
3.  $\check{K} = \varkappa$  e, per un osservatore  $o$ :  $\check{\Sigma} = (L_o \bar{g})^\flat$ ;
4. in coordinate, si ha

$$K_{ihj} = -\frac{1}{2}(\partial_i g_{hj} + \partial_j g_{hi} - \partial_h g_{ij}) , \quad K_{0ij} + K_{0ji} = -\partial_0 g_{ij} .$$

**Teorema 2.1.4** *L'insieme delle connessioni spazio-tempo metriche è in biezione con l'insieme delle 2-forme scalate del tipo*

$$\beta : \mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2) \otimes \wedge^2 T^* \mathbf{E} .$$

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, con le notazioni della Proposizione 2.1.1, si vede che la terna  $(\varkappa, (L_o \bar{g})^p, \beta)$  determina una connessione spazio-temporale metrica, e  $\beta$  è una 2-forma arbitraria.  $\square$

Questo risultato è di fondamentale importanza in quanto mette in luce una delle differenze più profonde tra la relatività galileiana e la relatività einsteiniana. Infatti, in quest'ultima la connessione è completamente determinata dalla metrica.

### 2.1.e 2-forma fondamentale

**Definizione 2.1.8** Sia  $\Gamma$  una connessione spazio-temporale. La 2-forma

$$\Omega := \nu_\Gamma \bar{\wedge} \vartheta : J_1 \mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2) \otimes \wedge^2 T^* J_1 \mathbf{E} ,$$

ove  $\nu_\Gamma$  è la proiezione verticale complementare a  $\Gamma$ , e  $\bar{\wedge}$  è il prodotto esterno composto con una contrazione con  $g$ , è detta *2-forma fondamentale su  $J_1 \mathbf{E}$*  indotta da  $g$  e  $\Gamma$ .  $\square$

È stato provato che  $\Omega$  è l'unica 2-forma scalata su  $J_1 \mathbf{E}$  indotta naturalmente da  $g$  e  $\Gamma$  [Jan93]. L'espressione in coordinate di  $\Omega$  è

$$\begin{aligned} \Omega &= g_{ij} u^0 \otimes (d_0^i - (\Gamma_{\lambda k}^i y_0^k + \Gamma_{\lambda 0}^i) d^\lambda) \wedge \vartheta^j \\ &= g_{ij} u^0 \otimes (d_0^i - \gamma^i d^0 - (\Gamma_{hk}^i y_0^k + \Gamma_{h0}^i) \vartheta^h) \wedge \vartheta^j . \end{aligned}$$

**Osservazione 2.1.5** La 2-forma fondamentale  $\Omega$  associata ad una connessione spazio-tempo  $\Gamma$  è non degenera, nel senso che

$$dt \wedge \Omega \wedge \Omega \wedge \Omega : J_1 \mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{T}^{*2} \otimes \mathbb{L}^6) \otimes \wedge^7 T^* J_1 \mathbf{E}$$

è una forma volume scalata su  $J_1 \mathbf{E}$ .  $\square$

La seguente proposizione è una caratterizzazione di  $\Gamma$  e di  $\gamma$  mediante  $\Omega$ .

**Proposizione 2.1.2** *Sia  $\Omega$  la 2-forma fondamentale associata ad una connessione spazio-tempo  $\Gamma$ . Allora:*

1.  $\gamma$  è l'unica connessione del secondo ordine polinomiale di secondo grado (rispetto alla struttura affine di  $J_1 \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ ) su  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  tale che

$$i_\gamma \Omega = 0 ;$$

2.  $\Gamma$  è l'unica connessione spazio-temporale tale che

$$\Omega = \nu_\Gamma \bar{\wedge} \vartheta .$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se  $\Gamma'$  è un'altra connessione spazio-temporale, e  $\gamma'$  è la connessione del secondo ordine indotta da  $\Gamma'$ , allora valgono le equazioni

$$\begin{aligned} i_{\gamma'} \Omega &= g_{ij} (\gamma'^i - \gamma^i) u^0 \otimes \vartheta^j = 0 , \\ (\nu_{\Gamma'} - \nu_\Gamma) \bar{\wedge} \vartheta &= \\ g_{ij} u^0 \otimes \left( (\gamma^i - \gamma'^i) d^0 + (\Gamma_{hk}^i y_0^k + \Gamma_{h0}^i - \Gamma'_{hk}{}^i y_0^k - \Gamma'_{h0}{}^i) \vartheta^h \right) \wedge \vartheta^j &= 0 . \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si deduce direttamente il primo asserto dell'enunciato; la seconda equazione implica il secondo asserto mediante il teorema 2.1.3.  $\square$

La 2-forma  $\Omega$  può essere letta mediante un osservatore. Si ha, quindi, la seguente proposizione.

**Proposizione 2.1.3** *Sia  $o$  un osservatore, e sia  $\Omega$  la 2-forma fondamentale associata ad una connessione spazio-temporale  $\Gamma$ . Allora si ha*

$$\Phi = 2o^* \Omega ,$$

ove  $\Phi$  è la 2-forma scalata definita in 2.2.

DIMOSTRAZIONE. È un semplice calcolo in coordinate adattate ad  $o$ .  $\square$

## 2.1.f Campo gravitazionale e campo elettromagnetico

In questa sezione aggiungiamo alle strutture sullo spazio-tempo i campi gravitazionale ed elettromagnetico, che daranno luogo ad una connessione spazio-temporale.

**Assioma G.3** Si assume che  $\mathbf{E}$  sia dotato di una connessione spazio-temporale

$$\Gamma^{\natural} : J_1 \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T J_1 \mathbf{E}$$

e di una 2-forma scalata

$$F : \mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{L}^{1/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes \wedge^2 T^* \mathbf{E} . \quad \square$$

La connessione spazio-temporale  $\Gamma^{\natural}$  è detta *campo gravitazionale*, e la 2-forma scalata  $F$  è detta *campo elettromagnetico*. D'ora in avanti l'indice  $\natural$  indicherà gli oggetti geometrici relativi al campo gravitazionale.

Si ricordi che il campo gravitazionale non è completamente determinato dalla metrica (teorema 2.1.4).

Le forme scalate

$$\begin{aligned} E &:= -\pi \lrcorner F : J_1 E \longrightarrow (\mathbb{T}^{*2} \otimes \mathbb{L}^{1/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes T^* \mathbf{E}, \\ B &:= F + 2dt \wedge E : J_1 E \longrightarrow (\mathbb{L}^{1/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes \wedge^2 T^* \mathbf{E}, \end{aligned}$$

sono dette, rispettivamente, *campo elettrico universale* e *campo magnetico universale*. Si ha

$$F = -2dt \wedge E + B.$$

Se  $o$  è un osservatore, le forme

$$\begin{aligned} o^* E &: \mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^{1/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes T^* \mathbf{E}, \\ o^* B &: \mathbf{E} \longrightarrow (\mathbb{L}^{1/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes \wedge^2 T^* \mathbf{E}, \end{aligned}$$

sono dette, rispettivamente, *campo elettrico* e il *campo magnetico* associati ad  $o$ . Si noti che il campo elettrico universale contiene l'informazione completa sul campo elettromagnetico.

**Osservazione 2.1.6** Valgono le espressioni in coordinate

$$F = 2F_{0j} d^0 \wedge d^j + F_{ij} d^i \wedge d^j = -2u_0 E_j d^0 \wedge \vartheta^j + B_{ij} \vartheta^i \wedge \vartheta^j,$$

e

$$\begin{aligned} E &= E_j d^j + E_0 d^0 = E_i \vartheta^i, \\ B &= B_{ij} d^i \wedge d^j + 2B_{0j} d^0 \wedge d^j = B_{ij} \vartheta^i \wedge \vartheta^j, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} E_j &= -u^0 (F_{0j} + F_{hj} y_0^h) & E_0 &= -u^0 F_{h0} y_0^h, \\ B_{ij} &= F_{ij} & B_{0j} &= -F_{hj} y_0^h. \end{aligned}$$

Perciò, in coordinate adattate ad un osservatore  $o$  si ha

$$o^* E = -u_0 F_{0j} d^j \quad o^* B = F_{ij} d^i \wedge d^j. \quad \square$$

Il prossimo obiettivo è cercare una connessione spazio-temporale che incorpori le informazioni relative ai campi gravitazionale ed elettromagnetico. A tal fine, essendo  $F$  una 2-forma scalata, il modo più semplice per realizzare l'accoppiamento è quello di sommare  $F$  con la 2-forma fondamentale  $\Omega^{\natural}$  indotta da  $\Gamma^{\natural}$ . Tuttavia, tale somma ha senso solamente se i due oggetti geometrici hanno le stesse dimensioni. Dunque, è necessaria una costante di accoppiamento  $c$  per la quale moltiplicare  $F$  in modo da ottenere un oggetto geometrico con le stesse dimensioni di  $\Omega^{\natural}$ . È chiaro che  $c \in \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}$ .

La scelta della costante di accoppiamento  $c$  dipende dal tipo di accoppiamento che si vuole realizzare. È possibile realizzare i seguenti tipi di accoppiamento

1.  $c = \frac{q}{m}$ , specifico per la meccanica di una particella  $(m, q)$ ;
2.  $c = \sqrt{\kappa}$ , specifico per la formulazione della seconda equazione dei campi;
3.  $c = \mu$ , ove  $\mu$  è il magnetone di Bohr, specifico per la meccanica di una particella con spin [CJM95], che non verrà trattata in questo lavoro.

Pertanto, solo i primi due tipi di accoppiamento verranno realizzati.

La 2-forma scalata

$$\Omega := \Omega^{\natural} + \Omega^e := \Omega^{\natural} + \frac{1}{2}cF$$

è detta *2-forma cosimplettrica totale* su  $J_1\mathbf{E}$ . Le ragioni per questo nome saranno chiare nella prossima sezione.

**Teorema 2.1.5** *Esiste un'unica connessione spazio-temporale  $\Gamma$  tale che*

$$\Omega = \nu_{\Gamma}\bar{\Lambda}\vartheta .$$

DIMOSTRAZIONE. Segue da un semplice calcolo in coordinate.  $\square$

La connessione spazio-temporale  $\Gamma$  è detta *connessione spazio-temporale totale*. Si pone anche  $K := \chi(\Gamma)$ . La connessione spazio-temporale totale  $\Gamma$  induce i seguenti oggetti geometrici

$$\begin{aligned} \Gamma^e &:= \Gamma - \Gamma^{\natural} = -\frac{1}{2}cg^{\sharp 2} \circ (F - 2dt \wedge E) : J_1\mathbf{E} \longrightarrow T^*\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{E}} (\mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E}) , \\ K^e &:= K - K^{\natural} : T\mathbf{E} \longrightarrow T^*\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{E}} VV\mathbf{E} , \\ \gamma^e &:= \gamma - \gamma^{\natural} = -cg^{\sharp} \circ \check{E} : J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^{-2} \otimes V\mathbf{E} ; \end{aligned}$$

$\Gamma^e$  è detta *forma elettromagnetica di saldatura*, e  $\gamma^e$  è detta *forza di Lorentz*. Si noti che la forza di Lorentz non è stata postulata, ma è stata dedotta *a posteriori*. Si hanno le espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} \Gamma^e &= -\frac{1}{2}c((F_h^i y_0^h + 2F_0^i)d^0 + F_j^i d^j) \otimes \partial_i^0 , \\ K^e &= -\frac{1}{2}c((F_h^i \dot{y}^h + 2F_0^i \dot{x}^0)d^0 + F_j^i d^j \dot{x}^0) \otimes \partial_i^{\cdot} , \\ \gamma^e &= -c(F_0^i + F_h^i y_0^h)u^0 \otimes \partial_i^0 , \end{aligned}$$

quindi

$$\Gamma_{hk}^i = \Gamma_{hk}^{\natural i} , \quad \Gamma_{0k}^i = \Gamma_{0k}^{\natural i} + \frac{1}{2}cF_k^i , \quad \Gamma_{0_0}^i = \Gamma_{0_0}^{\natural i} + cF_0^i .$$

**Osservazione 2.1.7** Se  $o$  è un osservatore, è immediato verificare che

$$\check{K} = \check{K}^{\natural}, \quad \check{\Sigma} = \check{\Sigma}^{\natural}, \quad \Phi = \Phi^{\natural} + cF. \quad \square$$

**Osservazione 2.1.8** La decomposizione  $K = K^{\natural} + K^e$  della connessione spazio-temporale totale induce la seguente decomposizione

$$R[K] = \frac{1}{2}[K, K] = \frac{1}{2}[K^{\natural}, K^{\natural}] + [K^{\natural}, K^e] + \frac{1}{2}[K^e, K^e],$$

ove  $\frac{1}{2}[K^{\natural}, K^{\natural}] = R[K^{\natural}]$ . Ciò è dovuto alle proprietà algebriche della parentesi di Frölicher–Nijenhuis (appendice A.7). □

Pertanto, il tensore di Ricci  $r[K] := 2C_1^1 R[K]$  di  $K$  si decompone secondo la formula:

$$r[K] = r[K^{\natural}] + r^{\sharp e} + r^e, \quad (2.2)$$

dove  $r[K^{\natural}]$  è il tensore di Ricci di  $K^{\natural}$  e  $r^{\sharp e} := 2C_1^1[K^{\natural}, K^e]$ , e  $r^e := C_1^1[K^e, K^e]$ . È possibile dimostrare con un calcolo diretto (si vedano [JaMo93a, JaMo93b] per dettagli) che valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} r^{\sharp e} &= \frac{1}{2}c(dt \otimes \operatorname{div}^{\natural} F + \operatorname{div}^{\natural} F \otimes dt), \\ r^e &= -\frac{1}{4}\check{F}^2 c^2 dt \otimes dt, \end{aligned}$$

dove  $\operatorname{div}^{\natural} F = \bar{\nabla}[K^{\natural}]F$ , in cui  $\bar{\nabla}$  indica una derivata covariante seguita da una contrazione metrica, e  $\check{F}^2 := g(\check{F}, \check{F}) : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{L}^{-3} \otimes \mathbb{M}$ . Valgono le espressioni in coordinate

$$r^{\sharp e} = \frac{1}{2}c \nabla_k F_{\lambda}^k (d^0 \otimes d^{\lambda} + d^{\lambda} \otimes d^0), \quad r^e = -\frac{1}{4}c^2 F_{ij} F^{ij} d^0 \otimes d^0. \quad \square$$

## 2.2 Equazioni dei campi

In questa sezione sono introdotte le equazioni dei campi gravitazionale ed elettromagnetico. Le equazioni sono due: la prima concerne i campi gravitazionale ed elettromagnetico, la seconda accoppia i campi gravitazionale ed elettromagnetico con le sorgenti materiali cariche.

### 2.2.a Prima equazione dei campi

**Assioma G.4** (Prima equazione dei campi) Si assume che la forma cosimplettrica  $\Omega$  soddisfi la seguente equazione per ogni costante di accoppiamento  $c$

$$d\Omega = 0. \quad \square$$

Un lungo calcolo in coordinate [JaMo93b] permette di dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 2.2.1** *La prima equazione dei campi è equivalente al sistema*

$$\nabla[K']g = 0 , \quad R[K]_{\lambda \mu}^i j = R[K]_{\mu \lambda}^j i .$$

Dunque, la prima equazione dei campi implica che la connessione spazio-temporale totale è metrica.

È possibile interpretare l'assioma precedente anche mediante un osservatore  $o$ .

**Teorema 2.2.2** *La prima equazione dei campi è equivalente al sistema*

$$\nabla[K']g = 0 , \quad d\Phi = 0 ,$$

ove  $\Phi$  è la 2-forma scalata definita in 2.2.

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, la prima equazione del campo implica le condizioni dell'enunciato per il teorema precedente e la proposizione 2.1.3. Il viceversa è conseguenza di considerazioni analoghe a quanto detto nella dimostrazione del teorema 2.1.4.  $\square$

La seconda condizione del teorema precedente è equivalente all'esistenza locale di un potenziale  $a : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2 \otimes T^* \mathbf{E}$  per  $\Phi$ , in modo che valga localmente l'equazione  $\Phi = 2da$ .

La prima equazione dei campi può essere decomposta in un sistema di condizioni, ognuna delle quali concerne un singolo tipo di campo. Infatti, l'arbitrarietà della costante di accoppiamento  $c$  implica il seguente risultato.

**Teorema 2.2.3** *La prima equazione dei campi è equivalente al sistema*

$$d\Omega^{\natural} = 0 , \quad dF = 0 .$$

**Osservazione 2.2.1** L'equazione  $dF = 0$  è la prima equazione di Maxwell, che, tramite un osservatore  $o$ , è equivalente al sistema

$$\check{d}(o^*B) = 0 , \quad \check{\text{rot}}(o^*E) = L_o o^*B . \quad \square$$

L'osservazione 2.1.8 implica che le condizioni del teorema 2.2.1 sono equivalenti al sistema

$$\begin{aligned} \nabla[K^{\natural}']g = 0 , \quad R[K^{\natural}]_{\lambda \mu}^i j &= R[K^{\natural}]_{\mu \lambda}^j i , \\ F^{ij} + F^{ji} = 0 , \quad dF = 0 . \end{aligned}$$

Pertanto, alla luce dell'osservazione 2.1.7, è evidente che la prima equazione del campo è equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \check{K}^{\natural} &= \varkappa , \quad \check{\Sigma}^{\natural} = g^{\flat} \circ L_o , \\ d\Phi^{\natural} &= 0 , \quad dF = 0 . \end{aligned}$$

## 2.2.b Seconda equazione dei campi

La seconda equazione dei campi viene postulata solamente nel caso di un fluido materiale incoerente elettricamente carico. In particolare, sono postulate due equazioni, una per il campo gravitazionale, ed una per il campo elettromagnetico; queste equazioni sono equivalenti ad una sola equazione sulla connessione totale.

Nelle due definizioni successive saranno introdotte, rispettivamente, le sorgenti del campo gravitazionale e del campo elettromagnetico.

**Definizione 2.2.1** Una applicazione  $\mu : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{L}^{-3} \otimes \mathbb{M}$  è detta *densità di massa*. I tensori simmetrici

$$\mathfrak{T}^e := \frac{1}{4} \kappa \check{F}^2 dt \otimes dt \quad \text{e} \quad \mathfrak{T}^\mu := \kappa \mu dt \otimes dt$$

sono detti, rispettivamente, *tensore di energia* di  $F$  e *tensore di energia* di  $\mu$ . Il tensore simmetrico

$$\mathfrak{T}^{\natural} := \mathfrak{T}^e + \mathfrak{T}^\mu : \mathbf{E} \longrightarrow T^* \mathbf{E} \otimes_{\mathbf{E}} T^* \mathbf{E} ,$$

è detto *tensore gravitazionale di energia*. □

**Definizione 2.2.2** Una applicazione  $\rho : \mathbf{E} \longrightarrow T^* \otimes \mathbb{L}^{-\frac{3}{2}} \otimes \mathbb{M}^{\frac{1}{2}}$  è detta *densità di carica*. Il tensore simmetrico

$$\mathfrak{T}^\rho := \sqrt{k} \rho dt \otimes dt$$

è detto *tensore di energia* di  $\rho$ . □

**Assioma G.5** Si assumono la *seconda equazione del campo gravitazionale*

$$r[K^{\natural}] = \mathfrak{T}^{\natural} ,$$

e la *seconda equazione del campo elettromagnetico*

$$\operatorname{div}^{\natural} F = \rho dt . \quad \square$$

L'espressione in coordinate delle seconde equazioni dei campi è la seguente

$$\begin{aligned} \partial_i K^{\natural}_{00}{}^i - \partial_0 K^{\natural}_{i0}{}^i + K^{\natural}_{i0}{}^j K^{\natural}_{0j}{}^i - K^{\natural}_{00}{}^j K^{\natural}_{ij}{}^i &= \kappa \mu , \\ \partial_i K^{\natural}_{0h}{}^i - \partial_0 K^{\natural}_{ih}{}^i + K^{\natural}_{ih}{}^j K^{\natural}_{0j}{}^i - K^{\natural}_{0h}{}^j K^{\natural}_{ij}{}^i &= 0 , \\ \partial_i K^{\natural}_{hk}{}^i - \partial_h K^{\natural}_{ik}{}^i + K^{\natural}_{ik}{}^j K^{\natural}_{hj}{}^i - K^{\natural}_{hk}{}^j K^{\natural}_{ij}{}^i &= 0 , \\ g^{ij} (\partial_i F_{j0} + K^{\natural}_{ij}{}^h F_{h0}) &= \rho , \\ g^{ij} (\partial_i F_{jk} + K^{\natural}_{ij}{}^h F_{hk}) &= 0 . \end{aligned}$$

**Teorema 2.2.4** *Le seconde equazioni dei campi gravitazionale ed elettromagnetico implicano la seguente seconda equazione dei campi*

$$r[K] = \tau ,$$

ove  $\tau := \tau^\mu + \tau^\rho$  è il tensore di energia relativo a  $\mu$  e  $\rho$ .

DIMOSTRAZIONE. È una conseguenza immediata della decomposizione (2.2) e delle considerazioni successive.  $\square$

**Corollario 2.2.1** *Le fibre dello spazio-tempo  $\mathbf{E}$  sono varietà riemanniane piatte.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, vale l'equazione  $\check{r}[K] = r[\check{K}]$ , ove  $r[\check{K}]$  è il tensore di Ricci della connessione  $\check{K}$  sulle fibre di  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$ , e il teorema precedente implica  $\check{r}[K] = 0$ . Quindi, essendo le fibre varietà riemanniane di dimensione 3 con tensore di Ricci nullo, esse sono anche varietà riemanniane piatte [KoNo63].  $\square$

**Osservazione 2.2.2** La seconda equazione dei campi produce l'analogo galileiano della seconda equazione di Maxwell. È evidente che tale equazione non implica un effetto del moto delle cariche sul campo elettromagnetico. Pertanto, questa caratteristica è un punto debole della teoria galileiana nei confronti della teoria einsteiniana (si veda [LBLE73]).  $\square$

## 2.3 Meccanica delle particelle

In questa sezione è introdotta la legge di moto di Newton. L'equazione postulata è l'unica equazione del secondo ordine che può essere formulata in modo intrinseco con le strutture geometriche dello spazio-tempo. Successivamente, è dimostrato che la legge di moto di Newton è equivalente all'annullarsi dell'operatore di Eulero-Lagrange indotto naturalmente da  $\Omega$ . Pertanto, tramite la teoria sviluppata nel capitolo 1, verrà sviluppato un formalismo lagrangiano naturale per la meccanica relativistica galileiana di una particella.

Sono da evidenziare la novità dell'approccio, le quali consistono nella ricerca della lagrangiana mediante la ricerca di potenziali di  $\Omega$ , seguendo le linee dettate nella sezione 1.4; ciò porta alla scoperta di una classe di lagrangiane che non dipendono da un osservatore, ma dalla scelta di un potenziale di  $\Omega$ , il quale non è altro che la forma di Poincaré-Cartan relativa alla corrispondente lagrangiana. Questa nuova prospettiva permette di superare molti problemi (unicità della forma di Poincaré-Cartan, definizione di una lagrangiana indipendente da un osservatore, ecc.); in sostanza, secondo l'autore il problema fondamentale della meccanica relativistica di una particella è il problema inverso [And86, AnTh92, Cra81, CPT84, Cra95, GMR81, LaTu77, MFLMR90, Olv86, Tho87, Ton69].

**Assioma G.6** Si assume la seguente *legge di moto di Newton* per una particella  $(m, q) \in \mathbb{M} \times \mathbb{Q}$ , il cui moto è  $s : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{E}$ :

$$\nabla[\gamma]s = 0 . \quad \square$$

Un moto è detto *newtoniano* se soddisfa l'assioma precedente, ovvero se la sua accelerazione assoluta è nulla. È importante notare che un moto  $s$  è newtoniano se e solo se  $\nabla[K]_{T_s}Ts = 0$ . Inoltre, la legge di moto può anche essere scritta

$$\nabla[\gamma^h]s = \gamma^e \circ j_1s ,$$

ovvero, in coordinate

$$\begin{aligned} \partial_{00}^2 s^i - (\Gamma_{hk}^i \circ s) \partial_0 s^h \partial_0 s^k - 2(\Gamma_{0h}^i \circ s) \partial_0 s^h - (\Gamma_{00}^i \circ s) = \\ \frac{q}{m} (F_0^i \circ s + F_h^i \circ s \partial_0 s^h) . \end{aligned}$$

**Osservazione 2.3.1** Si può confrontare questa formulazione della meccanica di una particella con la formulazione mediante la struttura di contatto [God69]. Una *struttura di contatto* su  $J_1\mathbf{E}$  è, per definizione, una 1-forma  $\alpha$  su  $J_1\mathbf{E}$  tale che  $\alpha \wedge d\alpha \wedge d\alpha \wedge d\alpha$  è una forma volume. Ad  $\alpha$  è associato l'unico campo vettoriale  $X$  tale che  $i_X d\alpha = 0$ ,  $i_X \alpha = 1$ , ed i moti newtoniani sono le curve integrali di tale campo.

Non è possibile formulare in modo relativistico la meccanica di una particella mediante una struttura di contatto. Tuttavia, la presente formulazione della meccanica presenta notevoli analogie con la precedente:  $\gamma : J_1\mathbf{E} \longrightarrow J_2\mathbf{E} \subset \mathbb{T}^* \otimes TJ_1\mathbf{E}$  è univocamente caratterizzato dall'equazione  $i_\gamma \Omega = 0$ , e soddisfa  $i_\gamma dt = \text{id}_T$ . Inoltre, il flusso delle soluzioni della legge di Newton soddisfa

$$L_\gamma \Omega = 0, \quad L_\gamma (dt \wedge \Omega \wedge \Omega \wedge \Omega) = 0. \quad \square$$

**Osservazione 2.3.2** È possibile formulare in modo 'duale' la legge di Newton. Infatti, un moto  $s$  è newtoniano se e solo se .

$$d(f \circ j_1s) = (L_\gamma f) \circ j_1s$$

vale per ogni funzione  $f : J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Ciò è dovuto all'identificazione  $Tj_1s \simeq j_2s$ . Inoltre,  $f$  viene a essere una *costante del moto* se e solo se  $L_\gamma f = 0$ .  $\square$

Ora, l'obiettivo è di dare una formulazione lagrangiana naturale della meccanica relativistica classica galileiana di una particella, utilizzando le tecniche sviluppate nel capitolo 1. A tal fine, si noti che gli assiomi sin qui introdotti forniscono una 2-forma su  $J_1\mathbf{E}$ , la 2-forma cosimplettrica  $\Omega$ . Tuttavia,  $\Omega$  è una forma scalata, mentre il bicompleso è stato costruito per forme non scalate. Sarebbe possibile provare che le costruzioni del capitolo 1 valgono anche per le forme scalate, ma è preferibile affrontare questo problema in un altro modo. In particolare, si cerca di elidere il fattore di scala di  $\Omega$  mediante la scelta di una opportuna costante. È facile rendersi conto che l'unica scelta possibile, con le costanti a disposizione, è la costante  $m/\hbar \in \mathbb{T} \otimes \mathbb{L}^{-2}$ , ove  $m \in \mathbb{M}$  è una massa. Si vedrà che l'utilizzo di tale costante non influirà sulla meccanica di una particella, poichè

nelle equazioni del moto la costante  $m/\hbar$  potrà sempre essere semplificata. Tuttavia, è interessante evidenziare che la costante di Planck trova un utilizzo anche in meccanica classica, benché questo utilizzo non sia fisicamente osservabile.

### 2.3.a Oggetti indotti nella colonna dinamica

L'oggetto fondamentale della colonna dinamica è la 2-forma totale cosimplettica  $\frac{m}{\hbar}\Omega$ , delle cui proprietà di unicità si è già parlato [Jan93, Jan94]. Un semplice calcolo in coordinate prova il seguente risultato.

**Proposizione 2.3.1** *La 2-forma totale cosimplettica  $\frac{m}{\hbar}\Omega$  è una 2-forma dinamica globale, cioè è una sezione globale*

$$\frac{m}{\hbar}\Omega \in \mathcal{D}.$$

**Lemma 2.3.1** *La mappa data mediante la composizione*

$$\mathbb{T}^* \otimes V^* \mathbf{E} @ \gg \gg V^* \mathbf{E} \otimes \mathbb{T}^* @ > \theta^* > \gg T^* J_1 \mathbf{E} \otimes \mathbb{T}^* @ \gg \gg T^* J_1 \mathbf{E} \wedge \mathbb{T}^*$$

è un morfismo di fibrati iniettivo, che ha espressione in coordinate

$$u^0 \otimes \check{d}^i \longmapsto d^i \wedge d^0.$$

**Proposizione 2.3.2** *La connessione spazio-temporale  $\Gamma$  e la metrica  $g$  danno il morfismo dinamico*

$$\epsilon := \frac{m}{\hbar} g^b \circ \nabla[\gamma] : J_2 \mathbf{E} \longrightarrow V^* \mathbf{E} \otimes \mathbb{T}^*,$$

che può essere naturalmente identificato, in virtù del lemma precedente, con la forma dinamica,

$$\epsilon := \frac{m}{\hbar} g^b \circ \nabla[\gamma] : J_2 \mathbf{E} \longrightarrow T^* \mathbf{E} \wedge \mathbb{T}^*,$$

che ha espressione in coordinate

$$\epsilon = \frac{m}{\hbar} g_{ij} u^0 (y_{00}^i - \gamma^i) \check{d}^j \otimes d^0 \simeq \frac{m}{\hbar} g_{ij} u^0 (y_{00}^i - \gamma^i) \vartheta^j \wedge d^0.$$

**Proposizione 2.3.3** *La 2-forma  $\frac{m}{\hbar}\Omega$  si decompone, secondo la decomposizione della proposizione 1.1.1, nella somma  $h(\frac{m}{\hbar}\Omega) + v(\frac{m}{\hbar}\Omega)$ , ove*

$$\begin{aligned} h\left(\frac{m}{\hbar}\Omega\right) &= \frac{m}{\hbar} g^b \circ \nabla[\gamma] \in \mathcal{C}_{(2,1)}^1 \wedge \mathcal{H}_1, \\ v\left(\frac{m}{\hbar}\Omega\right) &= (\vartheta \lrcorner \nu_{\Gamma v}) \bar{\wedge} \vartheta \in \mathcal{C}_2^1, \end{aligned}$$

**Osservazione 2.3.3** Si hanno le espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} h\left(\frac{m}{\hbar}\Omega\right) &= \frac{m}{\hbar}g_{ij}u^0 \otimes (y_{00}^i - \gamma^i)\vartheta^i \wedge d^0 \\ v\left(\frac{m}{\hbar}\Omega\right) &= \frac{m}{\hbar}g_{ij}u^0 \otimes (\vartheta_0^i - \Gamma_h^i \vartheta^h) \wedge \vartheta^j. \quad \square \end{aligned}$$

Si noti che la forma dinamica  $\epsilon$  è una sezione globale.

### 2.3.b Oggetti indotti nella colonna cinematica

Ora si procede integrando gli oggetti indotti nella colonna dinamica. Si sfrutterà la commutatività del bicompleso per trovare, nella colonna cinematica, oggetti definiti localmente a meno di un gauge. Si noti che, tuttavia, tali oggetti sono definiti indipendentemente da un osservatore.

Prima di tutto, si introducono i seguenti oggetti dipendenti da un osservatore.

**Definizione 2.3.1** Sia  $o$  un osservatore. Si definiscono l'*energia cinetica*, il *momento cinetico* e la *forma momento cinetico*, rispettivamente, come le mappe

$$\begin{aligned} k[o] &:= 1/2 \frac{m}{\hbar} g \circ (\nabla[o], \nabla[o]) : J_1 \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^*, \\ \check{p}[o] &:= \frac{m}{\hbar} g^b \circ \nabla[o] : J_1 \mathbf{E} \longrightarrow V^* \mathbf{E}, \\ p[o] &:= \theta^* \lrcorner \check{p}[o] : J_1 \mathbf{E} \longrightarrow T^* \mathbf{E}. \quad \square \end{aligned}$$

Si hanno le espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} k[o] &= 1/2 u^0 \frac{m}{\hbar} g_{ij} y_0^i y_0^j d^0, \\ \check{p}[o] &= u^0 \frac{m}{\hbar} g_{ij} y_0^j \check{d}^i, \\ p[o] &= \frac{m}{\hbar} u^0 (-g_{ij} y_0^i y_0^j d^0 + g_{ij} y_0^j d^i). \end{aligned}$$

Chiaramente, si ottiene

$$o^* k[o] = 0, \quad o^* p[o] = 0.$$

**Osservazione 2.3.4** Se  $o$  è un osservatore, allora i potenziali locali di  $\phi[o]$  saranno denotati da

$$\alpha[o] : \mathbf{E} \longrightarrow T^* \mathbf{E},$$

secondo la formula  $2d\alpha[o] = \phi[o]$ .

Chiaramente, i potenziali locali  $\alpha[o]$  sono definiti a meno di un gauge  $df$ , con  $f \in C^\infty(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ .  $\square$

Ora, è possibile integrare localmente  $\frac{m}{\hbar}\Omega$

**Teorema 2.3.1** *Sia  $o$  un osservatore. Allora, la sezione locale*

$$\tau := k[o] + p[o] + \alpha[o] \in \mathcal{M}$$

è un potenziale locale di  $\frac{m}{\hbar}\Omega$ , secondo l'equazione  $2d\tau = \frac{m}{\hbar}\Omega$ .

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\begin{aligned} 2d(\tau) &= \frac{m}{\hbar} (g_{ij}d_0^i \wedge \theta^j - ((\Gamma_{0hj} + \Gamma_{0jh})y_0^h + \Gamma_{jhk}y_0^h y_0^k)d^0 \wedge d^j + \\ &\quad (\Gamma_{hkj} + \Gamma_{hjk})y_0^k d^h \wedge d^j + \partial_\mu a_\lambda d^\mu \wedge d^\lambda + \partial_i^0 a_\lambda d_0^i \wedge d^\lambda) \\ &= \frac{m}{\hbar} (\Omega + \partial_\mu a_\lambda d^\mu \wedge d^\lambda + \partial_i^0 a_\lambda d_0^i \wedge d^\lambda + \\ &\quad g_{ij}(\Gamma_0^i d^0 \wedge d^j + \Gamma_k^i d^k \wedge d^0)) \\ &= \frac{m}{\hbar}\Omega. \quad \square \end{aligned}$$

Vale, inoltre, il seguente risultato, che è molto più forte del precedente.

**Teorema 2.3.2** *Se  $\frac{m}{\hbar}\Omega$  ammette un potenziale del tipo*

$$\tau \in \mathcal{H}_{(1,0)}^1,$$

secondo la formula  $2d\tau = \omega$ , allora

$$\tau = \Xi(h(\tau)) \in \mathcal{P}, \quad \lambda := h(\tau) \in \mathcal{H}_1^1.$$

Più precisamente, per ogni osservatore  $o$ , si può scrivere

$$\tau = k[o] + p[o] + \alpha[o],$$

ove

$$\alpha[o] = 2o^*\tau \in \Lambda_0^1, \quad d\alpha[o] = o^*\frac{m}{\hbar}\Omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Senza perdere in generalità, si può scrivere localmente

$$\tau = \frac{m}{\hbar} (-1/2 g_{ij}y_0^i y_0^j d^0 + g_{ij}y_0^i d^j + \alpha_\lambda d^\lambda),$$

ove  $\frac{m}{\hbar}\alpha \in \mathcal{H}_{(1,0)}^1$ .

Quindi, un calcolo in coordinate mostra che l'equazione  $2d\tau = \omega$  è equivalente al sistema

$$\partial_i^0 a_\lambda = 0, \quad 2d\alpha = \phi. \quad \square_{QED}$$

Il prossimo risultato è di fondamentale importanza nella ricerca di connessioni quantistiche.

**Corollario 2.3.1** *Siano  $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}_{(1,0)}^1$  due potenziali locali di  $\omega$  con lo stesso dominio di definizione. Allora, si ha*

$$\tau_1 = \tau_2 + c,$$

ove  $c \in \Lambda_0^1$  è chiusa.

**DIMOSTRAZIONE.** Si ponga  $c := \tau_1 - \tau_2 \in \mathcal{H}_{(1,0)}^1$ . Per ogni osservatore  $o$  si può scrivere

$$2\tau_1 = k[o] + p[o] + \alpha_1, \quad 2\tau_2 = k[o] + p[o] + \alpha_2,$$

ove  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda_0^1$ . Quindi, si ottiene

$$c = \alpha_1 - \alpha_2 \in \Lambda_0^1. \quad \square$$

**Osservazione 2.3.5** È chiaramente possibile considerare potenziali di  $\frac{m}{\hbar}\Omega$  di tipo più generale dei potenziali  $\tau \in \mathcal{H}_{(1,0)}^1$ , ossia potenziali del tipo  $\tilde{\tau} \in \Lambda_1^1$ . Tuttavia, si ha

$$\tilde{\tau} = \tau + \tilde{c},$$

ove  $\tau \in \mathcal{P}$  è un potenziale di  $\frac{m}{\hbar}\Omega$  e  $\tilde{c} \in \Lambda_1^1$  è chiusa. □

**Definizione 2.3.2** Un potenziale  $\tau \in \mathcal{H}_{(1,0)}^1$  di  $\Omega$  è detto *forma di Poincaré–Cartan associata alla 2-forma dinamica  $\frac{m}{\hbar}\Omega$* .

Se  $\tau$  è una forma di Poincaré–Cartan associata a  $\frac{m}{\hbar}\Omega$ , allora si dice che

$$\lambda := h(\tau)$$

è una *lagrangiana del primo ordine associata ad  $\Omega$* . □

**Osservazione 2.3.6** Se  $o$  è un osservatore, e  $\lambda$  è una lagrangiana del primo ordine associata ad  $\Omega$ , allora si ha

$$\lambda = k[o] + h(\alpha[o]);$$

in coordinate,

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{m}{\hbar} (g_{ij} y_0^i y_0^j + a_i y_0^i + a_0).$$

È chiaro dalla definizione che  $\lambda$  non dipende da un osservatore, ma, per il corollario 2.3.1, dipende solo dalla scelta di un gauge  $\tau$ . In particolare, si supponga che  $\tau_1$  e  $\tau_2 = \tau_1 + c$  siano due forme di Poincaré–Cartan di  $\frac{m}{\hbar}\Omega$ , e che  $\lambda_1, \lambda_2$  siano le corrispondenti lagrangiane. Allora si ha

$$\lambda_1 = \lambda_2 + 2h(c) .$$

Se in un sistema di coordinate si ha  $c = c_\lambda d^\lambda$ , allora  $(\lambda_1 - \lambda_2)_0 = 2(c_0 + y_0^i c_i)$ . Quindi, il gauge di una lagrangiana  $\lambda_1$  è del tipo  $2h(c)$ , ove  $c$  dipende da  $\mathbf{E}$ . È chiaro che, per la commutatività del bicompleso lagrangiano,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  producono lo stesso morfismo di Eulero–Lagrange  $\epsilon$ .  $\square$

I risultati sin qui ottenuti, insieme alla commutatività del bicompleso, permettono di integrare la forma dinamica  $\epsilon$ .

**Teorema 2.3.3** *Le lagrangiane del primo ordine  $\lambda \in \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{V}_2$  che inducono il morfismo di Eulero–Lagrange  $\epsilon$  sono del tipo*

$$\lambda = h(\tau) : J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^* ,$$

ove  $\tau$  è una forma di Poincaré–Cartan associata ad  $\frac{m}{\hbar}\Omega$ .

**Osservazione 2.3.7** Sia  $\tau$  una forma di Poincaré–Cartan associata ad  $\Omega$ , e  $\lambda$  la lagrangiana corrispondente. Allora, il momento di  $\lambda$  è la forma di contatto

$$\Pi(\lambda) = 2v(\tau)$$

con espressione in coordinate

$$\Pi(\lambda) = \frac{m}{\hbar}(g_{ij}y^i + a_j)\vartheta^j$$

È ovvio che il momento di  $\lambda$  dipende dalla scelta di  $\tau$ .  $\square$

Si possono riassumere i risultati sulla meccanica lagrangiana nel seguente corollario.

**Corollario 2.3.2** *Sia  $\tau$  una forma di Poincaré–Cartan (locale) associata ad  $\frac{m}{\hbar}\Omega$ . Allora, la lagrangiana (locale) associata a  $\tau$  produce un morfismo di Eulero–Lagrange che coincide (localmente) con il morfismo di Eulero–Lagrange  $\epsilon$*

$$E_1(\lambda) = \epsilon ,$$

quindi la legge di Newton generalizzata per un moto  $s : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{E}$  è equivalente alle equazioni di Eulero–Lagrange di  $\lambda$

$$E_1(\lambda) \circ j_2s = 0 .$$

Inoltre, si ha la decomposizione

$$\frac{m}{\hbar}\Omega = \epsilon + d_v\Pi(\lambda) ,$$

quindi

$$d_v\Pi(\lambda) = (\vartheta_1 \lrcorner \nu_{\Gamma^v}) \bar{\wedge} \vartheta_1$$

è una forma intrinseca che non dipende dalla scelta di  $\tau$ .

## 2.4 Soluzioni esatte newtoniane

In questa sezione si ricercano le soluzioni esatte che forniscano un modello relativistico generale per la meccanica di una particella libera soggetta ad una forza. I risultati sono stati esposti in [JaMo93a], [JaMo93b], e provengono da studi effettuati in [Mod71]. La classe delle soluzioni newtoniane è individuata introducendo assiomi *ad hoc* sugli oggetti geometrici della relatività generale galileiana, in modo che venga soddisfatta l'idea intuitiva della particella libera soggetta ad una forza. Il modello geometrico di spazio-tempo più vicino all'idea intuitiva di spazio delle configurazioni di una particella libera è uno spazio affine  $\mathbf{E}$  di dimensione 4, associato allo spazio vettoriale  $\bar{\mathbf{E}}$ , e fibrato sul tempo assoluto mediante una mappa affine  $t : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$ . Pertanto, verranno premesse alcune osservazioni, definizioni e risultati prima di introdurre il concetto di soluzione esatta newtoniana.

**Lemma 2.4.1** *Sia  $\mathbf{A}$  uno spazio affine associato allo spazio vettoriale  $\bar{\mathbf{A}}$ . Allora, la parallelizzazione naturale  $T\mathbf{A} \simeq \mathbf{A} \times \bar{\mathbf{A}}$  induce una connessione lineare piatta e geodeticamente completa  $K''$  su  $T\mathbf{A}$ , data da*

$$\begin{aligned} K'' : T\mathbf{A} \simeq \mathbf{A} \times \bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{A}} &\longrightarrow V\mathbf{A} \simeq \mathbf{A} \times \bar{\mathbf{A}} \times 0 \times \bar{\mathbf{A}} \\ : (a, v; w, z) &\longmapsto (a, v; 0, w) . \end{aligned}$$

La mappa esponenziale di tale connessione coincide con la somma,  $\exp = +$ .

Viceversa, sia  $\mathbf{A}$  una varietà, e  $\tilde{K}$  una connessione lineare su  $T\mathbf{A}$  tale che

1. il trasporto parallelo dato da  $\tilde{K}$  induca una parallelizzazione  $T\mathbf{A} \simeq \mathbf{A} \times \bar{\mathbf{A}}$ ;
2. la mappa esponenziale  $\exp$  induca una struttura affine su  $\mathbf{A}$  tale che  $+ := \exp$ .

Allora,  $\tilde{K}$  è coincide con la connessione  $K''$  indotta dalla struttura affine.

Si osservi che tale teorema è valido anche per uno spazio affine associato ad un gruppo di Lie. In accordo con i precedenti risultati, viene introdotta una nuova classe di connessioni spazio-temporali.

**Definizione 2.4.1** Una connessione spazio-temporale  $K''$  che induce su  $\mathbf{E}$  una parallelizzazione mediante il trasporto parallelo, e una struttura affine mediante la mappa esponenziale, è detta *connessione di fondo*.  $\square$

Chiaramente, se esiste una connessione di fondo, allora ne esistono infinite non isomorfe [KoNo63].

**Proposizione 2.4.1** Sia  $K''$  una connessione di fondo su  $\mathbf{E}$ , e sia  $\bar{\mathbf{E}}$  lo spazio vettoriale a cui è associato  $\mathbf{E}$ . Allora si ha

1. la mappa  $t : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  è affine;
2. posto  $\bar{\mathbf{S}} := \ker Dt$  si ha

$$V\mathbf{E} \simeq \mathbf{E} \times_{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{E}} \simeq \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{S}} ,$$

dunque  $t : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  ha la struttura di un fibrato affine associato al fibrato vettoriale prodotto  $\text{pr}_{01} : \mathbf{T} \times \bar{\mathbf{S}} \longrightarrow \mathbf{T}$ , e la struttura di un fibrato principale con gruppo strutturale  $\bar{\mathbf{S}}$ ;

3. se la connessione di fondo è metrica, allora  $g$  è un elemento costante  $g \in \mathbb{L}^2 \otimes \bar{\mathbf{S}}^* \otimes \bar{\mathbf{S}}^*$ .

In aggiunta agli assiomi precedentemente formulati, è dato il seguente assioma, la cui validità è limitata alla presente sezione, e che caratterizza le soluzioni esatte newtoniane.

**Assioma N.1** Si assume che  $F = 0$ , e che la restrizione  $K^{\natural}$  della connessione gravitazionale si estenda ad una connessione di fondo  $K''$ .

Si assume, inoltre, che la sorgente di  $K^{\natural}$  sia un fluido incoerente, ossia  $\tau^e = 0$ , e quindi  $\tau^{\natural} = \tau^{\mu}$ .  $\square$

La connessione  $K^{\natural}$  prende il nome di *connessione newtoniana*. Concordemente, lo spazio-tempo  $\mathbf{E}$  prende il nome di *spazio-tempo newtoniano*.

**Proposizione 2.4.2** La connessione gravitazionale si decompone nella somma

$$K^{\natural} = K'' + dt \otimes dt \otimes N^{\natural} ,$$

ove  $N^{\natural} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^{-2} \otimes V\mathbf{E}$ .

Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} \gamma^{\natural} &= \gamma'' + N^{\natural} , \\ \Omega^{\natural} &= \Omega'' - (dt \lrcorner N^{\natural}) \bar{\wedge} \vartheta_1 , \end{aligned}$$

e se  $o$  è un osservatore inerziale rispetto a  $K''$

$$\Phi^{\natural} = 2o^* \Omega^{\natural} = 2N^{\natural b} \wedge dt .$$

Inoltre, la curvatura della connessione gravitazionale soddisfa

$$R^{\natural} = [K^{\natural}, dt \otimes dt \otimes N^{\natural}] . \quad (2.3)$$

Valgono le espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} N^{\natural} &= N^{\natural i}_{00} u^0 \otimes u^0 \otimes \partial_i , \\ R^{\natural} &= \partial_j N^{\natural i}_{00} d^j \wedge d^0 \otimes \partial_i \otimes d^0 . \end{aligned}$$

**Osservazione 2.4.1** La precedente proposizione assicura che, se lo spazio-tempo ammette una connessione di fondo, allora l'insieme delle connessioni gravitazionali che soddisfano il precedente assioma è in biiezione con l'insieme dei campi tensoriali  $N : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^{-2} \otimes V\mathbf{E}$ .  $\square$

Prima di discutere in dettaglio le conseguenze della precedente proposizione, è bene osservare che la connessione  $K^{\natural}$  postulata nel precedente assioma non è unica.

**Proposizione 2.4.3** *Siano  $K^{\natural}_1, K^{\natural}_2$  due connessioni di fondo su  $\mathbf{E}$  tali che  $K^{\natural'} = K^{\natural}_1' = K^{\natural}_2'$ . Allora, se*

$$K^{\natural} = K^{\natural}_1 + dt \otimes dt \otimes N^{\natural}_1 = K^{\natural}_2 + dt \otimes dt \otimes N^{\natural}_2 ,$$

si ha

$$N^{\natural}_2 - N^{\natural}_1 : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{T}^{-2} \otimes \mathbf{S} ;$$

Se  $o_1, o_2$  sono due osservatori inerziali rispetto  $K^{\natural}_1, K^{\natural}_2$ , allora  $o_2 - o_1 : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes \bar{\mathbf{S}}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si deve al fatto che

$$\begin{aligned} \nabla[K^{\natural}](o_2 - o_1) &= dt \otimes dt \otimes (N^{\natural}_2 - N^{\natural}_1) , \\ \nabla[K^{\natural'}](o_2 - o_1) &= 0 . \quad \boxed{QED} \end{aligned}$$

La decomposizione della proposizione 2.4.2 ha influenza sulle equazioni del campo e del moto delle particelle, nel modo che segue.

1. La prima equazione dei campi è equivalente al sistema

$$\check{K}^{\natural} = \check{K}^{\natural} = \varkappa , \quad \check{d}N^{\natural b} = 0 .$$

2. La seconda equazione dei campi è equivalente a

$$r[K^{\natural}] = \check{\text{div}}^{\natural} N^{\natural} dt \otimes dt = \kappa \mu .$$

3. La legge di moto di Newton è equivalente all'equazione

$$\nabla[\gamma^{\mu}]_s = N^{\mu} \circ_s .$$

## 2.5 Soluzione esatta a simmetria sferica

In questa sezione vengono introdotti gli assiomi che caratterizzano le soluzioni esatte a simmetria sferica nel vuoto e in assenza di campo elettromagnetico [Vit95a, Vit95b]. Ciascun assioma viene postulato in modo da riprodurre nel modello l'idea fisica intuitiva di simmetria sferica. Questo modo di procedere sarà sempre evidenziato nei commenti precedenti o seguenti i singoli assiomi.

Prima di tutto, per motivi di semplicità, si introduce il seguente assioma.

**Assioma S.1** Si assume che

$$F = 0 , \quad \tau = 0 . \quad \square$$

La sezione è divisa in due parti; nella prima si danno assiomi di simmetria sferica su  $\mathbf{E}$  e  $g$ , e nella seconda si danno assiomi su  $K^{\natural}$ .

### 2.5.a Spazio-tempo e metrica a simmetria sferica

**Assioma S.2** Si assume che lo spazio-tempo  $t : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  sia un fibrato. □

In tal modo, le fibre sono diffeomorfe e l'insieme degli osservatori completi non è vuoto.

**Assioma S.3** Si assume una sezione  $c : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{E}$ . □

Dal punto di vista fisico, la sezione  $c$  rappresenta la linea di universo di una particella, che giocherà il ruolo di centro di simmetria.

**Assioma S.4** Per ogni  $\tau \in \mathbf{T}$  ogni geodetica in  $\mathbf{E}_{\tau}$  uscente da  $c(\tau)$  ammette una parametrizzazione in  $\mathbb{R}$ . □

Come prima conseguenza, ogni fibra di  $\mathbf{E}$  è una varietà riemanniana completa, quindi inestendibile (appendice A.9).

La mappa

$$r : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{L} : e \longmapsto r(e) := d_{t(e)}(c(t(e)), e) ,$$

ove  $d_{t(e)}$  è la funzione distanza indotta dalla metrica riemanniana in  $\mathbf{E}_{t(e)}$ , è detta *distanza da*  $c(\mathbf{T})$ .

**Assioma S.5** Si assume che, per ogni  $\tau \in \mathbf{T}$ ,  $(\mathbf{E}_{\tau}, g_{\tau})$  sia sfericamente simmetrica rispetto  $c(\tau)$ . □

**Osservazione 2.5.1** La conseguenza più importante del precedente assioma è che le fibre di  $\mathbf{E}$  sono isometriche a  $\mathbb{R}^n$  mediante le mappe esponenziali  $\exp_{c(\tau)}$ .  $\square$

Alla luce della precedente osservazione, il prossimo obiettivo è provare che le mappe esponenziali dotano  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  di una struttura naturale di fibrato vettoriale riemanniano. A tale scopo, si consideri il fibrato vettoriale  $c^*V\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$ , dotato della metrica riemanniana scalata  $c^*g : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{L}^2 \otimes (c^*V\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{T}} c^*V\mathbf{E})$ . Si noti che l'isomorfismo naturale  $Vc^*V\mathbf{E} \simeq c^*V\mathbf{E} \times_{\mathbf{T}} c^*V\mathbf{E}$  implica che  $c^*g$  può essere vista come una metrica scalata verticale su  $c^*V\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$ .

Per ogni  $\tau \in \mathbf{T}$  si consideri la mappa

$$\exp_{c(\tau)} : V_{c(\tau)}\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}_\tau ;$$

gli assiomi S.4, S.5 insieme al teorema A.9.1 che  $\exp_{c(\tau)}$  è un diffeomorfismo. In realtà, vale il seguente risultato.

**Teorema 2.5.1** *La mappa  $\exp|_{c(\mathbf{T})} : c^*V\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  è un'isomorfismo di fibrati su  $\text{id}_{\mathbf{T}}$  che preserva le metriche verticali.*

**DIMOSTRAZIONE.** È necessario solamente provare la differenziabilità di  $\exp$ . Infatti,  $\exp$  è la restrizione del flusso di uno *spray geodetico fibrato* [Lan72] indotto da  $g$ . Così,  $\exp$  è differenziabile poiché localmente rappresenta le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine dipendenti da un parametro in  $\mathbf{T}$ .  $\square$

**Corollario 2.5.1** *La mappa  $\exp|_{c(\mathbf{T})}$  dota  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  di una struttura di fibrato vettoriale con una metrica scalata lungo le fibre  $c^*g : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{L}^2 \otimes (\mathbf{E}^* \otimes_{\mathbf{T}} \mathbf{E}^*)$ , in cui  $c$  è la sezione nulla.*

Inoltre, la mappa  $\mathbf{r} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{L}$  è  $\mathcal{C}^\infty$  su  $\mathbf{E}' := \mathbf{E} \setminus c(\mathbf{T})$ .

Il teorema di banalità dei fibrati su base contraibile [Ste51, p.53] fornisce trivializzazioni che preservano il gruppo strutturale.

**Corollario 2.5.2** *Sia  $(\mathbf{P}, h)$  una fibra-tipo di  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T}$  ( $h$  è una metrica euclidea). Allora, esiste un insieme di osservatori completi o tali che l'isomorfismo indotto  $\psi_o : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T} \times \mathbf{P}$  si restringe a un'isometria su ogni fibra.*

Un osservatore completo è detto *isometrico* se dà una decomposizione globale di  $\mathbf{E}$  che conserva la metrica.

**Osservazione 2.5.2** Si vede facilmente che un osservatore  $o$  è isometrico se e solo se  $o$  soddisfa l'equazione

$$L_o \bar{g} = 0 ,$$

o, in coordinate adattate,  $\partial_0 g^{ij} = 0$ .  $\square$

## 2.5.b Connessione spazio-temporale a simmetria sferica

La ricerca di soluzioni a simmetria sferica è estesa anche alle connessioni che sono singolari su  $c(\mathbf{T})$ ; quindi, si indebolisce l'assioma G.3 nel modo seguente.

**Assioma S.6** Si assume che la connessione spazio-tempo  $K$  sia definita sul sottofibrato  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} \setminus c(\mathbf{T})$  di  $\mathbf{E}$ .

□

Ora, è introdotta una decomposizione naturale di  $\mathbf{E}'$ .

Per ogni  $\tau \in \mathbf{T}$  si ha una relazione di equivalenza in  $\mathbf{E}'_\tau$ : per ogni  $e, f \in \mathbf{E}'_\tau$  si pone  $e \sim f$  se e solo se esiste  $k \in \mathbb{R}^+$  tale che  $e = kf$ . L'insieme quoziente  $\mathbf{S} := \mathbf{E}'/\sim$  può essere dotato dell'unica struttura di fibrato (su  $\mathbf{T}$ ) tale che per ogni  $l \in \mathbb{L}$  le inclusioni naturali  $i_l : \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{E}'$  siano morfismi di fibrato.

**Proposizione 2.5.1** *Il fibrato  $\mathbf{E}'$  si decompone naturalmente nel modo seguente*

$$\mathbf{E}' \longrightarrow \mathbb{L} \times \mathbf{S}.$$

Si noti che  $\mathbf{S}$  è un fibrato banale, ma che non possiede una banalizzazione naturale. La decomposizione precedente induce la decomposizione

$$J_1 \mathbf{E}' \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes T\mathbb{L}) \times J_1 \mathbf{S}. \quad (2.4)$$

La decomposizione  $\mathbf{E}' \longrightarrow \mathbb{L} \times \mathbf{S}$  è chiaramente ortogonale. La metrica  $g$  si decompone nella somma

$$g = g_{\mathbb{L}} + \mathbf{r}^2 g_{\mathbf{S}},$$

dove

$g_{\mathbb{L}} : T\mathbb{L} \times_{\mathbb{L}} T\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}^2 \otimes \mathbb{R} : (u, v) \longmapsto uv$  (appendice A.1) è la metrica naturale scalata su  $\mathbb{L}$ ;

$g_{\mathbf{S}} : V_{\mathbf{S}} \times_{\mathbf{S}} V_{\mathbf{S}} \longrightarrow \mathbb{R}$  è l'unica metrica riemanniana verticale tale che per ogni  $l \in \mathbb{L}$  le inclusioni naturali  $i_l : \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{E}'$  sono immersioni isometriche fibrate rispetto alle metriche riemanniane scalate verticali  $l^2 g_{\mathbf{S}}$  e  $g$ .

**Proposizione 2.5.2** *Sia  $\mathcal{I}$  l'insieme degli osservatori completi isometrici. Allora, per ogni  $o \in \mathcal{I}$  la decomposizione della proposizione 2.5.1 induce la seguente decomposizione*

$$o = (o_{\mathbb{L}}, o_{\mathbf{S}}),$$

$$o_{\mathbb{L}} : \mathbf{T} \times \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T\mathbb{L}, \quad o_{\mathbf{S}} : \mathbf{S} \longrightarrow J_1 \mathbf{S},$$

ove

$$o_{\mathbb{L}} = 0, \quad L_{o_{\mathbf{S}}} \bar{g}_{\mathbf{S}} = 0.$$

Se  $o \in \mathcal{I}$ , allora  $o \in \mathcal{I}$  induce una decomposizione  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T} \times \mathbf{P}$ , quindi una decomposizione

$$\mathbf{E}' \longrightarrow \mathbf{T} \times \mathbf{P}' \longrightarrow \mathbf{T} \times \mathbb{L} \times S, \quad (2.5)$$

dove  $\mathbf{P}' := \mathbf{P} \setminus 0$ , e  $S := \mathbf{P}' / \sim$  come nella proposizione 2.5.1. In particolare, si ha  $\mathbf{E}' \longrightarrow \mathbb{L} \times \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{T} \times \mathbb{L} \times S$ , in cui la componente su  $\mathbb{L}$  è l'identità.

Dato  $o \in \mathcal{I}$ , verranno utilizzate coordinate adattate alla decomposizione (2.5) indotta da  $o$ , indicate con  $(x^0; r, y^\alpha)$ . In particolare, sarà usata su  $\mathbb{L}$  la coordinata naturale  $r$  fornita dalla scelta di una unità di lunghezza. Inoltre,  $(x^0, y^\alpha)$  indicherà una carta adattata su  $\mathbf{S}$ , con  $0 \leq \alpha, \beta \leq 2$ . Per convenienza, saranno scelte come coordinate  $(y^\alpha)$  le coordinate sferiche.

L'assunto di simmetria sferica sulla connessione gravitazionale può essere dato solamente tramite un osservatore. Infatti, non è possibile 'isolare' in modo intrinseco la parte di  $K^{\natural}$  non determinata dalla metrica, a meno di usare un osservatore (teorema 2.1.4).

Un modo particolarmente intuitivo di introdurre tale assioma è quello di caratterizzare una connessione gravitazionale a simmetria sferica richiedendo condizioni di simmetria sferica per la traiettoria delle particelle test. Chiaramente, ha senso parlare di traiettoria solamente rispetto ad un osservatore. Ed è naturale postulare tali condizioni rispetto ad un osservatore  $o \in \mathcal{I}$ .

Si introducono due categorie di osservatori in  $\mathcal{I}$ , caratterizzati da simmetrie del moto delle particelle test. Richiedere l'esistenza di tali osservatori è un'ipotesi su  $K^{\natural}$ .

**Definizione 2.5.1** Un osservatore  $o \in \mathcal{I}$  è detto *radialmente simmetrico* se, rispetto alla decomposizione  $\mathbf{E} \simeq \mathbf{T} \times \mathbf{P}$  indotta da  $o$ , ogni moto newtoniano  $z$  con condizioni iniziali

$$z(\tau_0) = (\tau_0, l_0, s_0) \in \mathbf{T} \times \mathbb{L} \times S \quad \text{e} \quad j_1 z(\tau) = v_0 \in \mathbb{T}^* \otimes T_{l_0} \mathbb{L}$$

soddisfa

1.  $z$  è definito su  $\mathbf{T}$ ;
2. rispetto alle decomposizioni (2.4), (2.5), si ha

$$z : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T} \times \mathbb{L} \times S : (\tau) \longmapsto (\tau, l(\tau), s_0), \quad j_1 z : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T\mathbb{L},$$

ove  $l : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{L}$  non dipende dalla condizione iniziale  $s_0 \in S$ . □

**Definizione 2.5.2** Un osservatore  $o \in \mathcal{I}$  è detto *rotazionalmente simmetrico* se, rispetto alla decomposizione  $\mathbf{E} \simeq \mathbf{T} \times \mathbf{P}$  indotta da  $o$ , ogni coppia di moti newtoniani  $z, z'$  con condizioni iniziali rispettivamente

$$\begin{aligned} z(\tau_0) &= (\tau_0, l_0, s_0) \in \mathbf{T} \times \mathbb{L} \times S & j_1 z(\tau) &= v_0 \in \mathbb{T}^* \otimes T_{s_0} S \\ z'(\tau_0) &= (\tau_0, l_0, s'_0) \in \mathbf{T} \times \mathbb{L} \times S & j_1 z'(\tau) &= v'_0 \in \mathbb{T}^* \otimes T_{s'_0} S \end{aligned}$$

e tali che  $\|v_0\| = \|v'_0\|$  soddisfa la seguente richiesta: ogni isometria  $\iota : S \longrightarrow S$  tale che  $T\iota_\tau(s, v_0) = (s', v'_0)$  mappa il moto  $z$  nel moto  $z'$ , cioè:

$$z' = (\text{id}_{\mathbb{L}}, \iota) \circ z. \quad \square$$

La connessione spazio-temporale  $K^\natural$  è detta *a simmetria sferica* se esiste un osservatore  $o \in \mathcal{I}$  che è radialmente e rotazionalmente simmetrico. Tale osservatore è detto *sfericamente simmetrico*.

**Assioma S.7** Si assume che la connessione spazio-temporale  $K^\natural$  sia sfericamente simmetrica.  $\square$

Si denoti con  $K^o$  la connessione piatta su  $\mathbf{E}$  indotta dalla parallelizzazione di  $\mathbf{E}$  relativa alla decomposizione  $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{T} \times \mathbf{P}$  indotta da  $o$ .

**Teorema 2.5.2** *Sia  $o$  un osservatore sfericamente simmetrico. Allora,  $K^\natural$  è univocamente determinata (a meno di un fattore dipendente dal tempo); in particolare, si ha*

$$\begin{aligned} K^\natural &= K^o + dt \otimes dt \otimes N^\natural, \\ N^\natural : \mathbf{T} \times \mathbb{L} &\longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{T}^* \otimes T\mathbb{L} \end{aligned} \quad (2.6)$$

where:

$$N^\natural = \frac{\mathbf{k}}{r^2}, \quad \mathbf{k} : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{T}^{-2} \otimes \mathbb{L}^3$$

**DIMOSTRAZIONE.** La prima equazione dei campi implica la metricità di  $K^\natural$ , e quindi (2.1.2)  $K^\natural_{0ij} = -K^\natural_{0ji}$ . Ciò dà  $K^\natural_{0r}{}^r = K^\natural_{0\alpha}{}^\alpha = 0$ .

Inoltre, essendo  $K^\natural_{rr}{}^r = 0$ , la componente della legge di moto lungo  $T\mathbb{L}$  prende la forma

$$\partial_0^2 l^r - K^\natural_{00}{}^r = 0$$

per un moto  $l$  con velocità iniziale in  $T\mathbb{L}$ , dunque  $K^\natural_{00}{}^r$  è definito su  $\mathbf{T} \times \mathbb{L}$  per l'assioma S.7. La componente della legge di moto lungo  $TS$  per il moto  $l$  è

$$2K^\natural_{0r}{}^\alpha \partial_0 l^r = -K^\natural_{00}{}^\alpha.$$

In ogni punto la precedente equazione vale per ogni condizione iniziale  $\partial_0 l^r$ , pertanto  $K^\natural_{0r}{}^\alpha = K^\natural_{0\alpha}{}^r = K^\natural_{00}{}^\alpha = 0$ .

La prima equazione dei campi implica  $d\Phi = 0$ , che è equivalente al sistema

$$\begin{aligned} 2\partial_i K^\natural_{0\alpha\beta} d^i \wedge d^\alpha \wedge d^\beta &= 0 \\ \partial_0 K^\natural_{0\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}$$

in cui la prima equazione dà  $\partial_r K^{\natural}_{0\alpha\beta} = 0$ .

Ora si sfrutta la seconda equazione dei campi per completare la prova. La componente  $r[K^{\natural}]_{0r}$  del tensore di Ricci è identicamente nulla; inoltre, si ha

$$\begin{aligned} r[K^{\natural}]_{0\theta} &= \partial_\phi K^{\natural}_{0\theta}{}^\phi = 0, \\ r[K^{\natural}]_{0\phi} &= \partial_\theta K^{\natural}_{0\phi}{}^\theta + \sin\theta \cos\theta K^{\natural}_{0\theta}{}^\phi = 0. \end{aligned}$$

Questo sistema ha la soluzione generale  $K^{\natural}_{0\phi}{}^\theta = qr^2 \sin\theta$ , ove  $q$  è una costante reale. Dall'assioma S.7 (simmetria rotazionale di  $o$ ) si deduce  $q = 0$ .

Infine,

$$r[K^{\natural}]_{00} = \partial_r K^{\natural}_{00}{}^r + \frac{2}{r} K^{\natural}_{00}{}^r = 0$$

ha la soluzione generale  $K^{\natural}_{00}{}^r = \frac{k}{r^2}$ , con  $k : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Il risultato è ottenuto ponendo  $\mathbf{k} = k(u^0)^2 \otimes (l_0)^3$ .  $\square$

**Osservazione 2.5.3** La connessione gravitazionale  $K^{\natural}$  può essere vista come una connessione newtoniana, anche se  $K^{\natural}$  non è definita su  $\mathbf{E}$ , ma su  $\mathbf{E}'$ . La connessione di fondo relativa a  $K^{\natural}$  è  $K^o$ .  $\square$

Il precedente risultato non specifica quale sia la classe degli osservatori sfericamente simmetrici. In realtà, questa classe contiene un unico elemento.

**Corollario 2.5.3** *Sia  $o \in \mathcal{I}$  un osservatore sfericamente simmetrico. Allora*

1.  $K^o$  non dipende dalla scelta di  $o$ ;
2. esiste un unico osservatore sfericamente simmetrico.

DIMOSTRAZIONE.

1. Dall'identità  $K^o = K^{\natural} - N$  si deduce che  $K^o$  è indipendente dalla scelta di  $o$ .
2. Si indichi con  $K^{\natural}$  l'unica connessione piatta associata con una connessione sfericamente simmetrica  $K^{\natural}$ . La connessione  $K^{\natural}$  induce su  $\mathbf{E}$  un'unica struttura affine. Le strutture affini indotte da osservatori sfericamente simmetrici non sono isomorfe tra loro. Quindi, la prima parte della prova mostra che esiste un unico osservatore sfericamente simmetrico.  $\square$

**Osservazione 2.5.4** Si ricordi che la connessione  $K^{\natural}$  non è piatta; infatti, usando la formula (2.3) si ha (a meno di un pull-back):

$$R[K^{\natural}] = \frac{\mathbf{k}}{r^3} (2dt \otimes dt \wedge \text{id}_{T\mathbb{L}} - dt \otimes dt \wedge \text{id}_{TS}) \neq 0.$$

La legge di moto per un moto  $s : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{E}$  prende la forma

$$\nabla[\gamma^{\natural}]s = N^{\natural} \circ s .$$

L'equazione precedente può essere considerata una reinterpretazione della legge di gravitazione di Newton in termini di una connessione con curvatura non nulla su uno spazio-tempo topologicamente banale. Un confronto con la legge di Newton suggerisce che, scelta una massa  $m$  (che si può considerare la massa della sorgente del campo gravitazionale, ossia una particella con linea di universo  $c(\mathbf{T})$ ), si può assumere

$$\mathbf{k} = \kappa m .$$

Si noti che, anche se  $c$  è la sezione nulla di  $\mathbf{E}$ , non ha senso chiedersi se  $c$  sia un moto newtoniano, poiché  $K^{\natural}$  non è definita su  $c(\mathbf{T})$ .  $\square$

**Osservazione 2.5.5** Si potrebbe provare che esiste un unico *osservatore in caduta libera*, determinato dalla velocità radiali di particelle in caduta libera partenti all'infinito con velocità nulla e cadenti su  $c$ . Questo osservatore non è isometrico, anche se è radialmente e rotazionalmente simmetrico.  $\square$

**Osservazione 2.5.6** Se lo spazio-tempo  $\mathbf{E}$  e la metrica  $g$  soddisfano gli assiomi della presente sezione, allora esiste una connessione  $K^{\natural}$  che soddisfa l'assioma di simmetria sferica. Infatti, una tale connessione può essere agevolmente costruita mediante un osservatore isometrico.  $\square$

**Osservazione 2.5.7** Con gli oggetti a disposizione si può costruire una metrica di Lorentz su  $\mathbf{E}'$ . Infatti, si consideri il potenziale di  $\Phi$

$$a = -(\kappa m)/r : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2 \otimes \mathbb{T}^* . \quad (2.7)$$

Si definisce la seguente metrica di Lorentz  $g_L$  su  $\mathbf{E}'$

$$g_L = (\vartheta_1^* g) \circ o + 2a \otimes dt ;$$

In coordinate adattate, i simboli di Christoffel della connessione sfericamente simmetrica  $K^{\natural}$  diversi da  $K^{\natural}_{\lambda\mu}{}^0$  sono gli stessi dei simboli corrispondenti della connessione di Levi-Civita indotta da  $g_L$ . Inoltre, il tensore di Einstein  $G_L$  indotto da  $g_L$  è dato da

$$G_L = \frac{1}{r^2} g_{\mathbb{L}} - \frac{1}{4} g_{\mathbf{S}} .$$

Così, si può interpretare lo spazio-tempo galileiano sfericamente simmetrico come uno spazio-tempo einsteiniano con la metrica di Lorentz  $g_L$  e il tensore di energia  $\tau = \frac{1}{r^2} g_{\mathbb{L}} - \frac{1}{4} g_{\mathbf{S}}$ . Si veda [Tra63, Tra66] per un'analisi più approfondita.  $\square$

## CAPITOLO 3

# STRUTTURE RELATIVISTICHE CLASSICHE EINSTEINIANE

In questo capitolo è sviluppata la teoria dei campi gravitazionale ed elettromagnetico in relatività generale classica einsteiniana. L'obiettivo è di dimostrare come le costruzioni geometriche del caso galileiano possano essere recuperate nel caso einsteiniano. La maggiore difficoltà sta nel fatto che molti oggetti che nel caso galileiano sono definiti sullo spazio-tempo, nel caso einsteiniano sono definiti sullo spazio delle velocità. I risultati esposti in questo capitolo sono tratti da [JaMo95].

### 3.1 Struttura geometrica dello spazio-tempo

In questa sezione sarà studiata la struttura geometrica dello spazio delle velocità nel contesto della relatività generale di Einstein.

#### 3.1.a Unità di misura e spazio-tempo

Gli spazi di unità di misura postulati in relatività einsteiniana sono gli stessi postulati per la relatività galileiana. Per precisione, è bene ripetere che si assumono i seguenti semi-spazi vettoriali di dimensione 1:

$\mathbb{T}$  , lo spazio vettoriale orientato di dimensione 1 delle *unità di tempo*;

$\mathbb{L}$  , lo spazio positivo delle *unità di lunghezza*;

$\mathbb{M}$  , lo spazio positivo delle *unità di massa*.

Anche in questo caso si introduce l'algebra tensoriale delle unità di misura, e si ha lo spazio delle cariche  $\mathbb{Q} := \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}$ . Inoltre, una particella è rappresentata anche in questo caso da una coppia costituita da una massa e da una carica. Si assume, inoltre, la *costante di Planck*

$$\hbar \in (\mathbb{T}^+)^* \otimes \mathbb{L}^2 \otimes \mathbb{M} ;$$

**Assioma E.1** Si assume che lo *spazio-tempo* sia una varietà  $\mathbf{M}$  di dimensione 4, con una metrica di Lorentz scalata

$$g : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{L}^2 \otimes T^* \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{M}} T^* \mathbf{M}$$

di segnatura  $(+ - - -)$ , e che  $\mathbf{M}$  sia orientata e orientata temporalmente.  $\square$

Le carte su  $\mathbf{M}$  saranno denotate con  $(x^\varphi)$ ,  $\varphi = 0, 1, 2, 3$ . Dunque, l'espressione in coordinate di  $g$  è

$$g = g_{\varphi\psi} d^\varphi \otimes d^\psi, \quad g_{\varphi\psi} : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{L}^2 \otimes \mathbb{R}.$$

Nel seguito, saranno impiegate carte tali che  $\partial_0$  è di tipo tempo e orientato temporalmente, e  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  sono di tipo spazio; quindi  $g_{00} > 0$ ,  $g_{11}, g_{22}, g_{33} < 0$ . Gli indici latini  $i, j, p, \dots$  indicheranno coordinate di tipo spazio, mentre gli indici greci  $\lambda, \mu, \varphi, \dots$  indicheranno coordinate spazio-temporali.

Si noti che, malgrado l'assenza nel caso einsteiniano di una fibrazione che dia il tempo assoluto, è presente uno spazio vettoriale che descrive gli intervalli di tempo proprio. Ciò è in accordo con l'interpretazione fisica standard.

**Assioma E.2** Si assume che la *velocità della luce* sia un elemento positivamente orientato

$$c \in \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}. \quad \square$$

Si noti che  $g$  e  $g/c^2$  possono essere viste come metriche di Lorentz non scalate rispettivamente sui fibrati vettoriali  $\mathbb{L}^* \otimes T\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$  e  $\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$ , rispettivamente.

### 3.1.b Spazio delle velocità

Lo scopo di questa sezione è di introdurre lo spazio delle velocità e la struttura di contatto. In particolare, lo spazio delle velocità sarà un determinato sottospazio di  $J_1(\mathbf{M}, 1)$  (appendice A.6), e la struttura di contatto sarà derivata dalla struttura di contatto di  $J_1(\mathbf{M}, 1)$ .

**Definizione 3.1.1** Una sottovarietà  $s \subset \mathbf{M}$  di dimensione 1 in  $\mathbf{M}$  di tipo tempo è detta *moto*. Il getto  $j_1 s \subset J_1(\mathbf{M}, 1)$  di un moto  $s \subset \mathbf{M}$  è detto *velocità di  $s$* .

Il sottofibrato aperto

$$i : U_1 \mathbf{M} \hookrightarrow J_1(\mathbf{M}, 1),$$

costituito dalle velocità dei moti in  $\mathbf{M}$ , è detto *spazio delle velocità*.  $\square$

**Osservazione 3.1.1** Il fibrato  $U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$  non è affine, nemmeno se  $\mathbf{M}$  è lo spazio-tempo di Minkowski. Si vedrà che le sue fibre sono varietà riemanniane. Questo fatto costituisce una delle maggiori differenze tra il caso galileiano e il caso einsteiniano.  $\square$

Se  $s$  è un moto, allora la lunghezza di un vettore  $v \in Ts$  è, per definizione,  $\|v\| = \sqrt{|g(v,v)|} \in \mathbb{L} \otimes \mathbb{R}$ .

**Lemma 3.1.1** *Sia  $s$  un moto. Allora, si ha l'isomorfismo naturale*

$$u_{1s} : Ts \longrightarrow s \times \mathbb{T} : v \in T_x s \longmapsto \left(x, \frac{\pm \|v\|}{c}\right) \in s \times \mathbb{T},$$

ove la scelta del segno dipende dall'orientazione temporale di  $v$ .  $\square$

**Lemma 3.1.2** *Il precedente isomorfismo induce naturalmente l'isomorfismo lineare su  $U_1\mathbf{M}$*

$$u_1 : i^* K_1(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow U_1\mathbf{M} \times \mathbb{T},$$

ove  $i$  è l'inclusione  $i : U_1\mathbf{M} \hookrightarrow J_1(\mathbf{M}, 1)$  (appendice A.6).

In coordinate si ha

$$(x^0, x^i, x_0^i, \tilde{x}^0) \circ u_1(\phi, v \cdot (\partial_0 + x_0^i(\phi)\partial_i)) = (x^0(\phi), x^i(\phi), x_0^i(\phi), v \cdot \sqrt{g_{00} + 2g_{0j}x_0^j(\phi) + g_{ij}x_0^i(\phi)x_0^j(\phi)}/c)$$

**Proposizione 3.1.1** *La struttura di contatto*

$$\mathfrak{d}_1 : K_1(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow J_1(\mathbf{M}, 1) \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M}$$

si restringe su  $U_1\mathbf{M}$  alla mappa

$$\mathfrak{d}_1 \equiv \mathfrak{d}_1 \circ (u_1)^{-1} : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}.$$

Si noti che, per abuso di notazione, in questo capitolo sarà denotata da  $\mathfrak{d}_1$  la restrizione della struttura di contatto su  $J_1(\mathbf{M}, 1)$  al sottofibrato  $U_1\mathbf{M}$  composta con l'isomorfismo naturale  $u$ . Si ha l'espressione in coordinate

$$\mathfrak{d}_1 = c \alpha \mathfrak{d}_{10} = c \alpha (\partial_0 + x_0^i \partial_i), \quad (3.1)$$

ove

$$\alpha = 1/\|\mathfrak{d}_{10}\| = 1/\sqrt{g_{00} + 2g_{0j}x_0^j + g_{ij}x_0^i x_0^j} \in \mathbb{L}^*. \quad \square$$

**Osservazione 3.1.2** Si ha

$$g \circ (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_1) = c^2.$$

Quindi, la mappa  $\mathfrak{d}_1$  permette di considerare  $U_1\mathbf{M}$  come un sottofibrato (non vettoriale)  $U_1\mathbf{M} \subset \mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}$ . □

Se  $s$  è un moto, allora  $\mathfrak{d}_1 \circ js : s \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}$  è il campo vettoriale scalato che rappresenta la velocità di  $s$ .

Mediante la metrica è possibile introdurre un analogo della forma  $dt$  del caso galileiano; in particolare, si introduce la 1-forma

$$\tau^{\natural} := \frac{g^b}{c^2} \circ \mathfrak{d}_1 : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T} \otimes T^*\mathbf{M},$$

che ha espressione in coordinate

$$\tau^{\natural} \equiv \tau_{\lambda}^{\natural} d^{\lambda} = \frac{\alpha}{c} (g_{0\lambda} + g_{i\lambda} x_0^i) d^{\lambda}.$$

Si noti che

$$\mathfrak{d}_1 \lrcorner \tau^{\natural} = \text{id},$$

cioè, in coordinate

$$c \alpha (\tau_0^{\natural} + \tau_h^{\natural} x_0^h) = \text{id}; \tag{3.2}$$

quest'ultima equazione implica

$$\partial_i^0 (1/\alpha) = c \tau_i^{\natural}.$$

### 3.1.c Decomposizione ortogonale

La metrica di Lorentz fornisce la decomposizione standard di ogni vettore tangente allo spazio-tempo nella somma di due componenti (una di tipo spazio, e l'altra di tipo tempo) una volta che sia stata assegnata in quel punto una direzione temporale. Questa sottosezione è dedicata allo scopo di dimostrare che tale decomposizione fornisce l'equivalente einsteiniano della successione esatta (A.6). Tale successione esatta è data naturalmente da una fibrazione (si veda l'osservazione A.7.2), che non esiste nel caso einsteiniano. Si

noti che questa è una delle maggiori differenze tra la teoria dei getti di sottovarietà e la teoria dei getti di fibrazioni.

Si considerino i seguenti fibrati vettoriali su  $U_1\mathbf{M}$

$$\begin{aligned} T^{\parallel}\mathbf{M} &:= \{(\phi, X) \in U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M} \mid X \in L_{\phi}\}, \\ T^{\perp}\mathbf{M} &:= \{(\phi, X) \in U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M} \mid X \in L_{\phi}^{\perp}\}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} T_{\parallel}^*\mathbf{M} &:= \{(\phi, \omega) \in U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T^*\mathbf{M} \mid \langle \omega, L_{\phi}^{\perp} \rangle = 0\}, \\ T_{\perp}^*\mathbf{M} &:= \{(\phi, \omega) \in U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T^*\mathbf{M} \mid \langle \omega, L_{\phi} \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

**Osservazione 3.1.3** Il fibrato  $T^{\parallel}\mathbf{M}$  coincide con il fibrato  $i^*K_1(\mathbf{M}, 1)$ . Dunque, si hanno gli isomorfismi lineari fibrati su  $U_1\mathbf{M}$

$$\mathfrak{d}_1 : U_1\mathbf{M} \times \mathbb{T} \longrightarrow T^{\parallel}\mathbf{M} \quad \tau^{\sharp} : T^{\parallel}\mathbf{M} \longrightarrow U_1\mathbf{M} \times \mathbb{T}. \quad \square$$

Così, i fibrati

$$T^{\parallel}\mathbf{M} \simeq U_1\mathbf{M} \times \mathbb{T} \longrightarrow U_1\mathbf{M}, \quad T^{\perp}\mathbf{M} \longrightarrow U_1\mathbf{M}$$

giocheranno i ruoli di

$$\mathbf{T} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbf{T}, \quad \forall \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$$

nel caso galileiano.

**Proposizione 3.1.2** *Si hanno le decomposizioni su  $U_1\mathbf{M}$*

$$\begin{aligned} U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M} &= T^{\parallel}\mathbf{M} \oplus_{U_1\mathbf{M}} T^{\perp}\mathbf{M}, \\ U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T^*\mathbf{M} &= T_{\parallel}^*\mathbf{M} \oplus_{U_1\mathbf{M}} T_{\perp}^*\mathbf{M}. \quad \square \end{aligned}$$

**Osservazione 3.1.4** Restringendo la metrica, si ottengono, rispettivamente, la metrica scalata definita negativa e la metrica scalata riemanniana

$$g_{\parallel} : U_1\mathbf{M} \longrightarrow T_{\parallel}^*\mathbf{M} \otimes_{U_1\mathbf{M}} T_{\parallel}^*\mathbf{M}, \quad g_{\perp} : U_1\mathbf{M} \longrightarrow T_{\perp}^*\mathbf{M} \otimes_{U_1\mathbf{M}} T_{\perp}^*\mathbf{M},$$

e gli isomorfismi lineari fibrati su  $U_1\mathbf{M}$

$$\begin{aligned} g_{\parallel}^{\flat} : T^{\parallel}\mathbf{M} &\longrightarrow \mathbb{L}^2 \otimes T_{\parallel}^*\mathbf{M}, & g_{\perp}^{\flat} : T^{\perp}\mathbf{M} &\longrightarrow \mathbb{L}^2 \otimes T_{\perp}^*\mathbf{M}, \\ g_{\parallel}^{\sharp} : T^{\parallel}\mathbf{M} &\longrightarrow \mathbb{L}^2 \otimes T_{\parallel}^*\mathbf{M}, & g_{\perp}^{\sharp} : T^{\perp}\mathbf{M} &\longrightarrow \mathbb{L}^2 \otimes T_{\perp}^*\mathbf{M}. \quad \square \end{aligned}$$

**Osservazione 3.1.5** Le seguenti basi locali sono reciprocamente duali, e sono adattate alle precedenti decomposizioni

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_0 &\equiv \partial_0 + x_0^i \partial_i, & b_i &\equiv \partial_i - c\alpha \tau_i^{\natural} \mathfrak{d}_0 = (\delta_i^j - c\alpha \tau_i^{\natural} x_0^j) \partial_j - c\alpha \tau_i^{\natural} \partial_0, \\ \lambda^0 &\equiv d^0 + c\alpha \tau_i^{\natural} \vartheta^i = c\alpha \tau_{\varphi}^{\natural} d^{\varphi}, & \vartheta^i &\equiv d^i - x_0^i d^0. \end{aligned}$$

Le mappe inverse di transizione alle basi  $(\partial_{\varphi})$ ,  $(d^{\varphi})$  sono

$$\begin{aligned} \partial_0 &= c\alpha \tau_0^{\natural} \mathfrak{d}_0 - x_0^i b_i, & \partial_i &= b_i + c\alpha \tau_i^{\natural} \mathfrak{d}_0, \\ d^0 &= \lambda^0 - c\alpha \tau_i^{\natural} \vartheta^i, & d^i &= (\delta_j^i - c\alpha \tau_j^{\natural} x_0^i) \vartheta^j + x_0^i \lambda^0. \quad \square \end{aligned}$$

**Osservazione 3.1.6** Si ha

$$\begin{aligned} g^{\flat} \circ \mathfrak{d}_0 &= \frac{1}{\alpha^2} \lambda^0 & g^{\flat} \circ b_i &= g_{ij}^{\perp} \vartheta^j = (g_{i\mu} - c^2 \tau_i^{\natural} \tau_{\mu}^{\natural}) d^{\mu}, \\ g^{\sharp} \circ \lambda^0 &= \alpha^2 \mathfrak{d}_0, & g^{\sharp} \circ \vartheta^i &= g_{\perp}^{ij} b_j = (g^{i\mu} - x_0^i g^{0\mu}) \partial_{\mu}, \end{aligned}$$

dove sono state introdotte le matrici reciprocamente inverse

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\perp} &:= b_i \cdot b_j = g_{ij} - c^2 \tau_i^{\natural} \tau_j^{\natural}, \\ g_{\perp}^{ij} &:= \vartheta^i \cdot \vartheta^j = g^{ij} - g^{i0} x_0^j - g^{j0} x_0^i + g^{00} x_0^i x_0^j. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 3.1.3** Valgono le seguenti identità.

$$(g^{i\mu} - x_0^i g^{0\mu}) \tau_{\mu}^{\natural} = 0 \tag{3.3}$$

$$(g_{i\mu} - c^2 \tau_i^{\natural} \tau_{\mu}^{\natural}) d^{\mu} = (g_{ij} - c^2 \tau_i^{\natural} \tau_j^{\natural}) \vartheta^j \tag{3.4}$$

$$(g^{i\mu} - x_0^i g^{0\mu}) (g_{i\nu} - c^2 \tau_i^{\natural} \tau_{\nu}^{\natural}) = \delta_{\nu}^{\mu} - c^2 \tau_{\nu}^{\natural} \tau^{\natural\mu}, \tag{3.5}$$

DIMOSTRAZIONE. L'equazione (3.3) segue da

$$g \circ (\vartheta^i, \tau^{\natural}) = 0.$$

L'equazione (3.4) segue dall'equazione (3.2), che dà

$$-(g_{ij} - c^2 \tau_i^{\natural} \tau_j^{\natural}) x_0^j = (g_{i0} - c^2 \tau_i^{\natural} \tau_0^{\natural}).$$

L'equazione (3.5) segue da

$$\begin{aligned} &(g^{i\mu} - x_0^i g^{0\mu}) (g_{i\nu} - c^2 \tau_i^{\natural} \tau_{\nu}^{\natural}) = \\ &g^{i\mu} g_{i\nu} - c^2 g^{i\mu} \tau_i^{\natural} \tau_{\nu}^{\natural} - g^{0\mu} g_{i\nu} x_0^i + c^2 g^{0\mu} \tau_i^{\natural} \tau_{\nu}^{\natural} x_0^i = \\ &g^{i\mu} g_{i\nu} - c^2 g^{i\mu} \tau_i^{\natural} \tau_{\nu}^{\natural} - g^{0\mu} g_{i\nu} x_0^i + g^{0\mu} (g_{0\nu} + g_{j\nu} x_0^j) - c^2 g^{0\mu} \tau_0^{\natural} \tau_{\nu}^{\natural} \\ &= \delta_{\nu}^{\mu} - \tau_{\nu}^{\natural} \tau^{\natural\mu}. \quad \square \end{aligned}$$

Ora è possibile esibire l'analogo della successione esatta (A.6).

**Proposizione 3.1.3** *La decomposizione di  $U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M}$  fornisce le successioni esatte corte su  $U_1\mathbf{M}$*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow T^\perp\mathbf{M} \longrightarrow U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M} \xrightarrow{\lambda} T^{\parallel}\mathbf{M} \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow T^{\parallel}\mathbf{M} \longrightarrow U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M} \xrightarrow{\vartheta} T^\perp\mathbf{M} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

in cui si ha

$$\begin{aligned} \lambda &= \tau^{\natural} \otimes_{\mathfrak{A}_1} : U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M} \longrightarrow T^{\parallel}\mathbf{M}, \\ \vartheta &= \text{id}_{T\mathbf{M}} - \tau^{\natural} \otimes_{\mathfrak{A}_1} : U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M} \longrightarrow T^\perp\mathbf{M}, \end{aligned}$$

con le espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^0 \otimes_{\mathfrak{A}_0} \\ &= -c^2 \tau^{\natural}_{\nu} \tau^{\natural\mu} d^\nu \otimes \partial_\mu = -c\alpha \tau^{\natural}_{\nu} (\delta_0^\mu + \delta_i^\mu x_0^i) d^\nu \otimes \partial_\mu \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta^i \otimes b_i \\ &= (\delta_\nu^\mu - c^2 \tau^{\natural}_{\nu} \tau^{\natural\mu}) d^\nu \otimes \partial_\mu = \delta_\nu^\mu - c\alpha \tau^{\natural}_{\nu} (\delta_0^\mu + \delta_i^\mu x_0^i) d^\nu \otimes \partial_\mu \\ &= (g^{i\mu} - x_0^i g^{0\mu}) (g_{i\nu} - c^2 \tau^{\natural}_i \tau^{\natural}_\nu) d^\nu \otimes \partial_\mu. \quad \square \end{aligned} \quad (3.7)$$

È chiaro che le successioni precedenti possono essere interpretate tramite la successione esatta corta naturale su  $J_1(\mathbf{M}, 1)$ . Per un abuso di notazione, la restrizione del morfismo lineare suriettivo su  $J_1(\mathbf{M}, 1)$

$$\vartheta_1 : J_1(\mathbf{M}, 1) \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M} \longrightarrow W_1(\mathbf{M}, 1)$$

al sottofibrato aperto  $i : U_1\mathbf{M} \hookrightarrow J_1(\mathbf{M}, 1)$  verrà denotata con la stessa lettera

$$\vartheta_1 : U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M} \longrightarrow i^*W_1(\mathbf{M}, 1).$$

**Corollario 3.1.1** *La proiezione  $\vartheta_1$  si fattorizza secondo il seguente diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc} U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M} & \xrightarrow{\vartheta_1} & i^*W_1(\mathbf{M}, 1) \\ & \searrow \vartheta & \nearrow I \\ & & T^\perp\mathbf{M} \end{array}$$

ove  $I$  è un isomorfismo lineare su  $U_1\mathbf{M}$ , e  $\vartheta$  è la proiezione ortogonale.

**Osservazione 3.1.7** La seconda successione esatta della precedente proposizione è la rilettura della restrizione della successione esatta naturale (A.9) ad  $U_1\mathbf{M}$  mediante la decomposizione ortogonale del fibrato tangente al di sopra di  $U_1\mathbf{M}$ , e la prima successione esatta della precedente proposizione fornisce l'analogo della successione esatta (A.6).

Si noti che, anche nel caso particolare di getti di sottovarietà della varietà di Lorentz  $\mathbf{M}$ , non esiste una successione esatta su  $\mathbf{M}$  analoga a (A.7.2), ma esiste l'analogo del rilevamento di (A.7.2) al primo getto, dato, appunto, dalla (A.6).  $\square$

**Corollario 3.1.2** *La decomposizione di  $U_1\mathbf{M} \times T^*\mathbf{M}$  fornisce le successioni esatte corte su  $U_1\mathbf{M}$*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow T_{\parallel}^*\mathbf{M} \longrightarrow U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T^*\mathbf{M} \xrightarrow{\vartheta^*} T_{\perp}^*\mathbf{M} \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow T_{\perp}^*\mathbf{M} \longrightarrow U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T^*\mathbf{M} \xrightarrow{\lambda^*} T_{\parallel}^*\mathbf{M} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

in cui si ha

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \pi_1 \otimes \tau^{\natural} : U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T^*\mathbf{M} \longrightarrow T_{\parallel}^*\mathbf{M}, \\ \vartheta^* &= 1_{\mathbf{M}}^* - \pi_1 \otimes \tau^{\natural} : U_1\mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} T^*\mathbf{M} \longrightarrow T_{\perp}^*\mathbf{M}, \end{aligned}$$

con le espressioni in coordinate

$$\lambda^* = \pi_{10} \otimes \lambda^0, \quad \vartheta^* = b_i \otimes \vartheta^i.$$

Si può ottenere un'interpretazione fisica delle mappe sinora introdotte. Una sezione

$$o : \mathbf{M} \longrightarrow U_1\mathbf{M}$$

è detta *osservatore*. Il campo vettoriale  $\pi_1 \circ o : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}$  rappresenta, pertanto, la velocità dell'osservatore  $o$ .

**Proposizione 3.1.4** *Si ha*

$$\pi_1 \circ js = (\pi_1 \circ js)^{\parallel} + (\pi_1 \circ js)^{\perp} = \delta(\pi_1 \circ o | s + \bar{\beta}),$$

ove

$$\delta = (\pi_1 \circ js) \lrcorner (\tau^{\natural} \circ o | s) = \frac{g(\pi_1 \circ o | s, \pi_1 \circ js)}{c^2} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - \|\bar{\beta}\|^2}} : s \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$\bar{\beta} = \frac{c^2((\pi_1 \circ js) \lrcorner (\vartheta \circ o | s))}{g(\pi_1 \circ o, \pi_1 \circ js)} : s \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T^{\perp}\mathbf{M}.$$

Il vettore  $\bar{\beta} \in \mathbb{T}^* \otimes L_o^\perp$  può essere interpretato come la *velocità di  $s$  osservata da  $o$* . Si hanno le equazioni

$$\delta > 1, \quad \|\bar{\beta}\| = \frac{c\sqrt{\delta^2 - 1}}{\delta} < c,$$

che esprimono, rispettivamente, la dilatazione temporale e il fatto che la velocità osservata di un moto è più piccola di  $c$ .

Sia  $(x^0, x^i)$  una carta su  $\mathbf{M}$  adattata all'osservatore  $o$ , cioè  $x_0^i(o) = 0$ . Si ha

$$\alpha \circ o = 1/\sqrt{g_{00}}, \quad \tau_0^\sharp \circ o = 1/(c\alpha).$$

Perciò, per un moto  $s$  si può scrivere

$$\delta = \frac{\alpha \tau_0^\sharp}{\sqrt{g_{00}}}|_{js}, \quad \bar{\beta} = \frac{c x_0^i (g_{00} \partial_i - g_{0i} \partial_0)}{\tau_0^\sharp \sqrt{g_{00}}}|_{js}.$$

### 3.1.d Fibrato verticale dello spazio delle velocità

In questa sottosezione sono mostrate alcune analogie fondamentali tra il fibrato verticale  $VU_1\mathbf{M}$  della fibrazione  $\pi_0^1 : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$  e il fibrato verticale  $V_{\mathbf{E}}J_1\mathbf{E}$  della fibrazione  $t_0^1 : J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  del caso galileiano.

**Lemma 3.1.4** *Il prolungamento verticale di  $\mathfrak{d}_1$*

$$V_{\mathfrak{d}_1} : VU_1\mathbf{M} \longrightarrow V(\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}) \simeq (\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}) \times_{\mathbf{M}} (\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M})$$

si fattorizza attraverso un isomorfismo fibrato su  $U_1\mathbf{M}$

$$v^\perp : VU_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T^\perp\mathbf{M},$$

secondo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} VU_1\mathbf{M} & \xrightarrow{V_{\mathfrak{d}_1}} & (\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}) \times_{\mathbf{M}} (\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}) \\ & \searrow v^\perp & \nearrow \\ & & \mathbb{T}^* \otimes T^\perp\mathbf{M} \end{array}$$

Si hanno le espressioni in coordinate

$$v^\perp = c \alpha d_0^i \otimes b_i, \quad v^{\perp-1} = \frac{1}{c\alpha} \vartheta^i \otimes \partial_i^0. \quad (3.8)$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $\phi \in U_1\mathbf{M}$  e  $X \in V_\phi U_1\mathbf{M}$ , allora  $X$  può essere espresso come  $X = d\sigma(0)$ , ove  $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow U_{1\phi}\mathbf{M}$  è una curva verticale tale che  $\sigma(0) = \phi$ . Essendo  $c^2 = g \circ (\mathcal{D}_1 \circ \sigma, \mathcal{D}_1 \circ \sigma)$ , si ha

$$\begin{aligned} 0 &= g(T(\mathcal{D}_1 \circ \sigma)(0), (\mathcal{D}_1 \circ \sigma)(0)) \\ &= g((V\mathcal{D}_1 \circ d\sigma)(0), (\mathcal{D}_1 \circ \sigma)(0)) = g(V\mathcal{D}_1(X), \mathcal{D}_1(\phi)). \end{aligned}$$

L'espressione in coordinate (3.8) segue dall'espressione in coordinate di  $\mathcal{D}_1$ .  $\square$

Pertanto, l'isomorfismo  $VU_1\mathbf{M} \simeq \mathbb{T}^* \otimes T^\perp \mathbf{M}$  gioca, nella teoria einsteiniana, un ruolo analogo all'isomorfismo  $V_E J_1 \mathbf{E} \simeq \mathbb{T}^* \otimes V\mathbf{E}$  del caso galileiano. Tuttavia, quest'ultimo isomorfismo è dovuto alla struttura affine di  $t_0^1 : J_1 \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ , mentre l'isomorfismo  $VU_1\mathbf{M} \simeq \mathbb{T}^* \otimes T^\perp \mathbf{M}$  è originato dalla metrica  $g$ .

La mappa  $v^{\perp-1}$  può essere vista come una 1-forma di saldatura scalata

$$\Phi := v^{\perp-1} : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T} \otimes_{U_1\mathbf{M}} T^*\mathbf{M} \otimes VU_1\mathbf{M}.$$

Questa forma è l'analogo einsteiniano di  $J_1 \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T} \otimes V^* \mathbf{E} \otimes_{J_1 \mathbf{E}} V J_1 \mathbf{E}$ .

### 3.1.e Connessioni

Questa sottosezione è dedicata alla ricerca di una mappa  $\chi$  fra connessioni lineari sul fibrato  $T\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$  e connessioni su  $U_1\mathbf{M}$ , in analogia con quanto fatto nel caso galileiano. Il risultato principale è che tale corrispondenza esiste, ma che non vale l'analogo del corollario 2.1.1. Inoltre, la mappa  $\chi$  non risulta essere a valori nell'insieme delle connessioni affini, come succede, invece, nel caso galileiano.

Nel corso di questa sezione verranno usati ripetutamente concetti sviluppati nell'appendice A.7.

Una connessione

$$K : T\mathbf{M} \longrightarrow T^*\mathbf{M} \otimes_{T\mathbf{M}} T\mathbf{M},$$

su  $T\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$  ha un'espressione in coordinate del tipo seguente

$$K = d^\mu \otimes (\partial_\varphi + K_\varphi{}^\mu \dot{\partial}_\mu), \quad K_\varphi{}^\mu \in C^\infty(T\mathbf{M}),$$

ove  $(x^\varphi, \dot{x}^\varphi)$  è una carta indotta su  $T\mathbf{M}$  da una carta  $(x^\varphi)$  su  $\mathbf{M}$ .

Se  $K$  è lineare, allora vale l'equazione

$$K_\varphi{}^\lambda = K_\varphi{}^\lambda{}_\psi \dot{x}^\psi, \quad K_\varphi{}^\lambda{}_\psi \in C^\infty(\mathbf{M});$$

inoltre si può considerare la connessione  $F^* \otimes K$  su  $\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$ , ove  $F$  è la connessione piatta naturale sul fibrato banale  $\text{pro}_1 : \mathbb{T} \times \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$ . Per abuso di

notazione si pone  $\nu_K \equiv \nu_{F^* \otimes K}$ . Nella carta coordinata indotta  $(x^\varphi, \dot{x}_0^\varphi)$  su  $\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}$  si ha

$$\nu_K = \nu_{F^* \otimes K} = u^0 \otimes (\dot{d}_0^\mu - K_\varphi^\mu{}_\psi \dot{x}_0^\psi d^\varphi) \otimes \partial_\mu. \quad (3.9)$$

Una connessione  $\Gamma$  su  $U_1\mathbf{M}$  può essere rappresentata nei modi equivalenti

$$\begin{aligned} \Gamma : U_1\mathbf{M} &\longrightarrow T^*\mathbf{M} \underset{U_1\mathbf{M}}{\otimes} TU_1\mathbf{M}, \\ v^\perp \circ \nu_\Gamma : U_1\mathbf{M} &\longrightarrow T^*U_1\mathbf{M} \underset{U_1\mathbf{M}}{\otimes} (\mathbb{T}^* \otimes T^\perp\mathbf{M}), \end{aligned}$$

con espressione in coordinate

$$\Gamma = d^\varphi \otimes (\partial_\varphi + \Gamma_{\varphi 0}^i \partial_i^0), \quad (3.10)$$

$$v^\perp \circ \nu_\Gamma = c\alpha(d_0^i - \Gamma_{\varphi 0}^i d^\varphi) \otimes b_i, \quad \Gamma_{\varphi 0}^i \in C^\infty(U_1\mathbf{M}). \quad (3.11)$$

La torsione di  $\Gamma$  rispetto alla forma di saldatura  $\Phi$

$$[\Gamma, \Phi] : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T} \otimes \wedge^2 T^*\mathbf{M} \underset{U_1\mathbf{M}}{\otimes} VU_1\mathbf{M}$$

ha l'espressione in coordinate

$$\begin{aligned} [\Gamma, \Phi] &= \frac{1}{c} ((\partial_0 \rho + c\tau^h{}_j \Gamma_{00}^j) d^0 \wedge d^i \\ &\quad + ((\partial_j \rho + c\tau^h{}_h \Gamma_{j0}^h) x_0^i - \rho(\partial_j^0 \Gamma_{00}^i + \Gamma_{j0}^i - x_0^h \partial_h^0 \Gamma_{j0}^i) d^0 \wedge d^j \\ &\quad + (\partial_j \rho + c\tau^h{}_h \Gamma_{j0}^h) d^j \wedge d^i - \rho \partial_k^0 \Gamma_{h0}^i d^h \wedge d^k) \otimes \partial_i^0, \end{aligned}$$

in cui si è posto  $\rho \equiv 1/\alpha$ .

Il seguente teorema è l'analogo del teorema 2.1.1 per il caso galileiano, e può essere provato allo stesso modo.

**Teorema 3.1.1** *Per ogni connessione lineare  $K$  su  $T\mathbf{M}$  la mappa*

$$\nu_\Gamma = \vartheta \circ \nu_K \circ T\mathcal{A}$$

data dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} TU_1\mathbf{M} & \xrightarrow{\nu_\Gamma} & VU_1\mathbf{M} & \xrightarrow{v^\perp} & \mathbb{T}^* \otimes T^\perp\mathbf{M} \\ \downarrow (\pi_{U_1\mathbf{M}}, T\mathcal{A}_1) & & & & \uparrow \vartheta \\ U_1\mathbf{M} \times_M T(\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}) & \xrightarrow{(\text{id}_{U_1\mathbf{M}} \times \nu_K)} & U_1\mathbf{M} \times_M (\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}) & & \end{array}$$

è una connessione  $\Gamma$  su  $U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$  che ha espressione in coordinate

$$\Gamma_{\varphi 0}^i = K_{\varphi}^i{}_j x_0^j + K_{\varphi}^i{}_0 - x_0^i (K_{\varphi}^0{}_j x_0^j + K_{\varphi}^0{}_0). \quad (3.12)$$

Ciò definisce un morfismo affine  $\chi : K \longmapsto \Gamma$  tra i seguenti spazi affini

1. lo spazio delle connessioni lineari  $K$  su  $T\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$ ;
2. lo spazio delle connessioni  $\Gamma$  su  $U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$ .

**Definizione 3.1.2** Le seguenti connessioni su  $T\mathbf{M}$  e  $U_1\mathbf{M}$

$$K^{\natural} := \varkappa, \quad \nu_{\Gamma^{\natural}} := \vartheta \circ \nu_{K^{\natural}} \circ T\mathfrak{A}_1,$$

ove  $\varkappa$  è la connessione di Levi-Civita indotta da  $g$ , sono dette *connessioni gravitazionali* (su  $T\mathbf{M}$  e  $U_1\mathbf{M}$ ).  $\square$

Si noti che i simboli di Christoffel di  $\varkappa$  sono i seguenti

$$\varkappa_{\varphi\psi}^{\sigma} = -\frac{g^{\sigma\tau^{\natural}}}{2} (\partial_{\varphi} g_{\tau^{\natural}\psi} + \partial_{\psi} g_{\tau^{\natural}\varphi} - \partial_{\tau^{\natural}} g_{\varphi\psi}). \quad \square \quad (3.13)$$

Anche nel caso einsteiniano si ha una corrispondenza fra le curvatures di  $K$  e  $\Gamma = \chi(K)$ , che si dimostra come nel caso galileiano. Si noti che

$$v^{\perp} \circ R[\Gamma] : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes (\wedge^2 T^* \mathbf{M} \otimes_{U_1\mathbf{M}} T^{\perp} \mathbf{M})$$

ha espressione in coordinate

$$v^{\perp} \circ R[\Gamma] = c \alpha R[\Gamma]_{\lambda\mu 0}^i d^{\lambda} \wedge d^{\mu} \otimes b_i.$$

**Teorema 3.1.2** Se  $K$  è una connessione lineare su  $T\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$ , e se  $\Gamma = \chi(K)$ , allora

$$R[\Gamma] = \vartheta \circ R[K] \circ \mathfrak{A}_1,$$

secondo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U_1\mathbf{M} \times_M \mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M} & \xrightarrow{\text{id}_{U_1\mathbf{M}} \times R[K]} & U_1\mathbf{M} \times_M (\mathbb{T}^* \otimes (\wedge^2 T^* \mathbf{M} \otimes_M T\mathbf{M})) \\ \uparrow (\text{id}_{U_1\mathbf{M}}, \mathfrak{A}) & & \downarrow \text{id}_{\wedge^2 T^* \mathbf{M}} \otimes \vartheta \\ U\mathbf{M} & \xrightarrow{v^{\perp} \circ R[\Gamma]} & \mathbb{T}^* \otimes (\wedge^2 T^* \mathbf{M} \otimes_{U_1\mathbf{M}} T^{\perp} \mathbf{M}) \end{array}$$

In coordinate

$$(R[\Gamma])_{\lambda\mu 0}^i = (R[K])_{\lambda\mu}^i x_0^j + (R[K])_{\lambda\mu}^i x_0^0 + \\ - x_0^i ((R[K])_{\lambda\mu}^0 x_0^j + (R[K])_{\lambda\mu}^0 x_0^0).$$

Un fatto molto importante è che anche nel caso einsteiniano esiste l'analogo della connessione del secondo ordine del caso galileiano. Tramite questa connessione si può formulare la legge del moto delle particelle test.

Si denoti con  $i : U_2\mathbf{M} \hookrightarrow J_2(\mathbf{M}, 1)$  il sottofibrato aperto dei getti del secondo ordine di moti in  $\mathbf{M}$ .

**Lemma 3.1.5** *L'isomorfismo 3.1.1 induce naturalmente l'isomorfismo lineare*

$$u_2 : i^* K_2(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow U_2\mathbf{M} \times \mathbb{T}$$

su  $\text{id}_{U_2\mathbf{M}}$  (appendice A.6).

**Proposizione 3.1.5** *La struttura di contatto del secondo ordine*

$$\mathfrak{d}_2 : K_2(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow J_2(\mathbf{M}, 1) \times_{\mathbf{M}} T\mathbf{M}$$

si restringe su  $U_2\mathbf{M}$  all'inclusione fibrata

$$\mathfrak{d}_2 \equiv \mathfrak{d}_2 \circ (u_2)^{-1} : U_2\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}.$$

Si noti che  $U_2\mathbf{M} \longrightarrow U_1\mathbf{M}$  non ha una struttura di fibrato affine, come  $J_2\mathbf{E} \longrightarrow J_1\mathbf{E}$  nel caso galileiano. La coppia  $(\mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_1)$  è, tuttavia, un morfismo di fibrati. Si ha l'espressione in coordinate

$$\mathfrak{d}_2 = c\alpha(\partial_0 + x_0^i \partial_i + x_{00}^i \partial_i^0).$$

Una sezione

$$\gamma : U_1\mathbf{M} \longrightarrow U_2\mathbf{M}$$

è detta *connessione del secondo ordine* su  $\mathbf{M}$ . Tenendo conto dell'inclusione  $\mathfrak{d}_2$ , ogni connessione del secondo ordine  $\gamma$  può essere caratterizzata come un campo vettoriale scalato

$$\gamma : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes TU_1\mathbf{M}$$

tale che la coppia  $(\gamma, \mathfrak{d}_1)$  è un morfismo di fibrati.

La differenza con il caso galileiano è che una connessione del secondo ordine  $\gamma$  non può indurre, nel caso einsteiniano, una connessione di  $U_1\mathbf{M}$  sul tempo assoluto.

Se  $\gamma$  è una connessione del secondo ordine su  $\mathbf{M}$ , allora si ha l'espressione in coordinate

$$\gamma = c\alpha(\partial_0 + x_0^i\partial_i + \gamma_{00}^i\partial_i^0), \quad \gamma_{00}^i \in C^\infty(U_1\mathbf{M}). \quad (3.14)$$

Infine, il seguente teorema fornisce la corrispondenza tra le connessioni  $\Gamma$  su  $U_1\mathbf{M}$  e le connessioni del secondo ordine su  $\mathbf{M}$ .

**Teorema 3.1.3** *Se  $\Gamma$  è una connessione su  $U_1\mathbf{M}$ , allora*

$$\gamma := \mathfrak{d}_1 \lrcorner \Gamma : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes TU_1\mathbf{M}$$

*è una connessione del secondo ordine su  $\mathbf{M}$ .*

Si ha l'espressione in coordinate

$$\gamma_{00}^i = \Gamma_{00}^i + \Gamma_{j0}^i x_0^j.$$

**Corollario 3.1.3** *La metrica  $g$  dà la connessione del secondo ordine gravitazionale*

$$\gamma^{\natural} := \mathfrak{d}_1 \lrcorner \Gamma^{\natural}. \quad \square$$

### 3.1.f 2-forma fondamentale

Qui sarà oggetto di studio la 2-forma naturale indotta da una connessione  $\Gamma$  sullo spazio delle velocità. Anche in questo caso si procede per analogia con il caso galileiano.

**Definizione 3.1.3** *Sia  $\Gamma$  una connessione su  $U_1\mathbf{M}$ . La 2-forma scalata su  $U_1\mathbf{M}$*

$$\Omega := (v^\perp \circ \nu_\Gamma) \bar{\wedge} \vartheta : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2 \otimes \wedge^2 T^*U_1\mathbf{M},$$

*è detta 2-forma fondamentale su  $U_1\mathbf{M}$  indotta naturalmente da  $g$  e  $\Gamma$ .* □

Si ha l'espressione in coordinate

$$\Omega = c\alpha(g_{i\mu} - c^2\tau_i^{\natural}\tau_{\mu}^{\natural})(d_0^i - \Gamma_{\varphi_0}^i d^\varphi) \wedge d^\mu \quad (3.15)$$

$$= c\alpha(g_{ij} - c^2\tau_i^{\natural}\tau_j^{\natural})(d_0^i - \Gamma_{\varphi_0}^i d^\varphi) \wedge \vartheta^j \quad (3.16)$$

$$= c\alpha(g_{ij} - c^2\tau_i^{\natural}\tau_j^{\natural})(d_0^i - \gamma_{00}^i d^0 - \Gamma_{h_0}^i \vartheta^h) \wedge \vartheta^j, \quad (3.17)$$

ove  $\gamma := \mathfrak{d}_1 \lrcorner \Gamma$ .

**Teorema 3.1.4** *Esiste un'unica connessione del secondo ordine  $\gamma$  tale che*

$$\gamma \lrcorner \Omega = 0,$$

*e precisamente si ha*

$$\gamma = \mathfrak{d}_1 \lrcorner \Gamma : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes TU_1\mathbf{M}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue da (3.1), (3.14) and (3.17).  $\square$

**Definizione 3.1.4** La 2–forma fondamentale su  $U_1\mathbf{M}$  indotta dalla connessione gravitazionale  $\Gamma^\natural$  è detta 2–forma gravitazionale.  $\square$

Si prenda in considerazione la 1–forma scalata

$$c^2\tau^\natural : U_1\mathbf{M} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2) \otimes T^*U_1\mathbf{M}.$$

È già stato osservato che tale forma è l’analogo einsteiniano della 1–forma  $dt$  del caso galileiano. Tuttavia, la forma  $dt$  è chiusa, mentre  $c^2\tau^\natural$  non lo è.

**Lemma 3.1.6** *La forma*

$$\eta := c^2\tau^\natural \wedge \Omega^\natural \wedge \Omega^\natural \wedge \Omega^\natural : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^{*4} \otimes \mathbb{L}^8 \otimes \wedge^7 T^*U_1\mathbf{M},$$

con espressione in coordinate

$$c^2\tau^\natural \wedge \Omega^\natural \wedge \Omega^\natural \wedge \Omega^\natural = 6c^4\alpha^4 |g| d^0 \wedge d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d_0^1 \wedge d_0^2 \wedge d_0^3,$$

è una forma volume scalata su  $U_1\mathbf{M}$ .  $\square$

**Teorema 3.1.5** *La 2–forma gravitazionale  $\Omega^\natural$  è una 2–forma simplettica esatta e scalata su  $U_1\mathbf{M}$ . Un potenziale distinto di  $\Omega^\natural$  è la 1–forma scalata  $c^2\tau^\natural$ , cioè*

$$\Omega^\natural = c^2 d\tau^\natural. \quad \square$$

DIMOSTRAZIONE. La metrica  $g$  produce la 1–forma di Liouville scalata [LiMa87]

$$\theta : \mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2 \otimes T^*(\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M})$$

definita da

$$\theta(X) := g(T\pi_M(X), \pi_{\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}}(X)), \quad \forall X \in T(\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}),$$

ove  $\pi$  indica proiezioni naturali. In coordinate

$$\theta = g_{\mu\lambda} \dot{x}_0^\lambda u^0 \otimes d^\mu. \quad \square$$

Il differenziale di questa forma è una 2–forma scalata su  $\mathbb{T}^* \otimes T\mathbf{M}$ , che ha espressione in coordinate

$$d\theta = u^0 \otimes (\partial_\varphi g_{\mu\lambda} \dot{x}_0^\lambda d^\varphi + g_{\mu\lambda} \dot{d}_0^\lambda) \wedge d^\mu.$$

Si può agevolmente provare che

$$\pi_1^* \theta = \tau^\natural, \quad \pi_1^* d\theta = \Omega^\natural,$$

da cui segue la tesi.  $\square$

La 2-forma gravitazionale  $\Omega^{\natural}$  è il candidato per il programma di quantizzazione della meccanica relativistica einsteiniana secondo le linee del caso galileiano (capitolo 4). Il fatto che  $\Omega^{\natural}$  è esatta e ha un potenziale distinto è conseguenza diretta del fatto che  $\Gamma^{\natural}$  è indotta da una connessione metrica, e costituisce una differenza fondamentale tra il caso galileiano e il caso einsteiniano.

## 3.2 Campo gravitazionale e campo elettromagnetico

In questa sezione si introduce il campo elettromagnetico.

**Assioma E.3** Si assume che il *campo elettromagnetico* sia una 2-forma scalata chiusa su  $\mathbf{M}$

$$F : \mathbf{M} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes \wedge^2 T^* \mathbf{M}. \quad \square$$

**Osservazione 3.2.1** La prima equazione dei campi è stata, di fatto, assunta, richiedendo la chiusura di  $F$ . Lo studio di questa equazione è molto più semplice nel caso einsteiniano che nel caso galileiano.  $\square$

Si denota un generico potenziale locale di  $F$  con  $A : \mathbf{M} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes T^* \mathbf{M}$ . Così, per definizione, si pone  $2dA = F$ .

Le forme scalate su  $U_1 \mathbf{M}$

$$\begin{aligned} E &:= -\pi_{\perp} \lrcorner F : U_1 \mathbf{M} \longrightarrow (\mathbb{T}^{*2} \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes T_{\perp}^* \mathbf{M}, \\ B &:= F + 2\tau^{\natural} \wedge E : U_1 \mathbf{M} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes \wedge^2 T_{\perp}^* \mathbf{M}, \end{aligned}$$

sono dette, rispettivamente, *campo elettrico universale* e *campo magnetico universale*. Si ha  $F = -2\tau^{\natural} \wedge E + B$ .

I campi *elettrico* e *magnetico* associati ad un osservatore  $o : \mathbf{M} \longrightarrow U_1 \mathbf{M}$  sono definiti come le forme pull-back

$$\begin{aligned} o^* E &: \mathbf{M} \longrightarrow (\mathbb{T}^{*2} \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes T^* \mathbf{M}, \\ o^* B &: \mathbf{M} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes \wedge^2 T^* \mathbf{M}. \end{aligned}$$

I campi elettrico e magnetico universale contengono l'informazione completa sul campo elettromagnetico.

**Osservazione 3.2.2** Valgono le espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} F &= 2F_{0j} d^0 \wedge d^j + F_{ij} d^i \wedge d^j = -\frac{2}{c\alpha} E_j \lambda^0 \wedge \vartheta^j + B_{ij} \vartheta^i \wedge \vartheta^j, \\ E &= E_i \vartheta^i = E_j d^j + E_0 d^0, \quad B = B_{ij} \vartheta^i \wedge \vartheta^j = B_{ij} + 2B_{0j} d^0 \wedge d^j, \end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned} E_j &= -c\alpha(F_{0j} + F_{hj}x_0^h) & E_0 &= -c\alpha F_{h0}x_0^h, \\ B_{ij} &= F_{ij} + \tau^h_i E_j - \tau^h_j E_i & B_{0j} &= -B_{hj}x_0^h. \end{aligned}$$

Quindi, in una carta adattata ad  $o$ , le espressioni in coordinate dei campi elettrico e magnetico sono

$$\begin{aligned} o^*E &= -\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}F_{0j}d^j, \\ o^*B &= (F_{ij} - \frac{1}{g_{00}}(g_{i0}F_{0j} - g_{j0}F_{0i}))d^i \wedge d^j. \quad \square \end{aligned}$$

Procedendo per analogia col caso galileiano, si dimostra ora che il campo elettromagnetico può venire incorporato nella struttura gravitazionale sullo spazio delle fasi.

Anche nel caso einsteiniano è necessaria una costante di accoppiamento. Ci si limiterà a considerare la costante di accoppiamento

$$\frac{q}{mc} \in \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{*1/2},$$

corrispondente alla scelta di una particella

$$(m, q) \in \mathbb{M} \times \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}.$$

Si definisce la 2-forma totale

$$\Omega := \Omega^h + \frac{q}{2mc}F : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2 \otimes \wedge^2 T^*U_1\mathbf{M}.$$

È chiaro che

$$d\Omega = 0;$$

tuttavia,  $\Omega$  non ha, in generale, un potenziale globale. Si può scrivere, localmente,

$$(c^2\tau^h + \frac{q}{mc}A) \wedge \Omega \wedge \Omega \wedge \Omega = (c^2\tau^h + \frac{q}{mc}A) \wedge \Omega^h \wedge \Omega^h \wedge \Omega^h.$$

Questa 7-forma non è, in generale, una forma volume locale; per esempio, se  $A = -g_{0\mu}d^\mu$ , allora la 7-forma si annulla. Quindi,  $\Omega$  può non essere una 2-forma di contatto.

Ora si ricerca una connessione del secondo ordine totale. Si noti che una sezione  $\gamma : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes TU_1\mathbf{M}$  è una connessione del secondo ordine se e solo se  $\gamma - \gamma^h$  è una sezione  $\gamma - \gamma^h : U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes VU_1\mathbf{M}$ .

**Teorema 3.2.1** *Esiste un'unica connessione del secondo ordine  $\gamma$  su  $\mathbf{M}$  tale che*

$$\gamma \lrcorner \Omega = 0.$$

In particolare,  $\gamma$  è data da

$$\gamma = \gamma^{\natural} + \gamma^e,$$

ove

$$\gamma^e = \frac{q}{mc} v^{\perp-1} \circ g^{\sharp} \circ E,$$

con espressione in coordinate

$$\gamma^e = -\frac{q}{mc} (g^{i\mu} - x_0^i g^{0\mu}) (F_{0\mu} + F_{j\mu} x_0^j) \partial_i^0 = \frac{q}{mc^2 \alpha} g_{\perp}^{ij} E_j \partial_i^0.$$

DIMOSTRAZIONE. Tenendo conto delle espressioni di  $\Omega^{\natural}$ ,  $\gamma^{\natural}$  e  $F$  si ha

$$\gamma^{\natural} \lrcorner F = \mathbb{A}_1 \lrcorner F, \quad \gamma^e \lrcorner \Omega^{\natural} = g^{\flat} \circ v^{\perp} \circ \gamma^e,$$

e quindi

$$\begin{aligned} 0 = \gamma \lrcorner \Omega &= \gamma^{\natural} \lrcorner \Omega^{\natural} + \frac{q}{2mc} \gamma^{\natural} \lrcorner F + \gamma^e \lrcorner \Omega^{\natural} + \frac{q}{2mc} \gamma^e \lrcorner F \\ &= 0 + \frac{q}{2mc} \mathbb{A}_1 \lrcorner F + \frac{1}{2} g^{\flat} \circ v^{\perp} \circ \gamma^e + 0. \quad \boxed{QED} \end{aligned}$$

**Osservazione 3.2.3** La procedura seguita ha permesso di ritrovare la forza di Lorentz

$$f := \frac{q}{mc} \circ g^{\sharp} \circ E : U_1 \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T^{\perp} \mathbf{M} \subset U_1 \mathbf{M} \times_{\mathbf{M}} (\mathbb{T}^{*2} \otimes T \mathbf{M}),$$

con espressione in coordinate

$$f = \frac{q\alpha}{m} (g^{i\mu} - x_0^i g^{0\mu}) (F_{0\mu} + F_{j\mu} x_0^j) b_i = \frac{q}{mc} g_{\perp}^{ij} E_j b_i,$$

come sottoprodotto dell'accoppiamento tra campo gravitazionale e elettromagnetico.  $\square$

Per finire, si ricerca la connessione totale su  $U_1 \mathbf{M}$ . Si ponga  $g^{\sharp 2} := \text{id}_{T^* \mathbf{M}} \otimes g^{\sharp}$ .

**Lemma 3.2.1** *Si hanno le sezioni*

$$\begin{aligned} \Gamma_E^e &:= -\frac{q}{2mc} v^{\perp-1} \circ \vartheta \circ g^{\sharp 2} \circ (2\tau^{\natural} \wedge E) : U_1 \mathbf{M} \longrightarrow T_{\parallel}^* \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{M}} VU_1 \mathbf{M}, \\ \Gamma_B^e &:= -\frac{q}{2mc} v^{\perp-1} \circ g^{\sharp 2} \circ B : U_1 \mathbf{M} \longrightarrow T_{\perp}^* \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{M}} VU_1 \mathbf{M}, \end{aligned}$$

con espressioni in coordinate

$$\Gamma_E^e = \frac{q}{2mc^2 \alpha} g_{\perp}^{ij} E_j \tau^{\natural} \otimes \partial_i^0, \quad \Gamma_B^e = -\frac{q}{2mc^2 \alpha} g_{\perp}^{ij} B_{hj} \vartheta^h \otimes \partial_i^0.$$

Inoltre, valgono le relazioni

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} \lrcorner \Gamma_E^e &= \gamma^e, & -(v^\perp \circ \Gamma_E^e) \bar{\wedge} \vartheta &= -\frac{q}{2mc} 2\tau^{\natural} \wedge E. \\ \mathfrak{d} \lrcorner \Gamma_B^e &= 0, & -(v^\perp \circ \Gamma_B^e) \bar{\wedge} \vartheta &= \frac{q}{2mc} B. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue da un calcolo in coordinate mediante la base  $(\lambda^0, \vartheta^i)$ , il lemma 3.1.5 e il lemma 3.1.6.  $\square$

Si consideri, ora, una sezione

$$H : U_1 \mathbf{M} \longrightarrow T^* \mathbf{M} \otimes_{U_1 \mathbf{M}} VU_1 \mathbf{M}.$$

Si definisce la mappa

$$A(v^\perp \circ H) : U_1 \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes \wedge^2 T_\perp^* \mathbf{M}$$

per mezzo della composizione

$$\begin{aligned} UM &\xrightarrow{H} T^* \mathbf{M} \otimes_{U_1 \mathbf{M}} VU_1 \mathbf{M} \xrightarrow{\vartheta^* \otimes (g^\flat \circ v^\perp)} \\ &\mathbb{T}^* \otimes T_\perp^* \mathbf{M} \otimes_{U_1 \mathbf{M}} T_\perp^* \mathbf{M} \xrightarrow{\text{Alt}} \mathbb{T}^* \otimes \wedge^2 T_\perp^* \mathbf{M}. \end{aligned}$$

**Lemma 3.2.2** *Le seguenti condizioni si equivalgono*

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} \lrcorner H &= 0, & (v^\perp \lrcorner H) \bar{\wedge} \vartheta &= 0; \\ H : U_1 \mathbf{M} &\longrightarrow T_\perp^* \mathbf{M} \otimes_{U_1 \mathbf{M}} VU_1 \mathbf{M} \subset T^* \mathbf{M} \otimes_{U_1 \mathbf{M}} VU_1 \mathbf{M}, & A(v^\perp \circ H) &= 0; \\ H &= H_j^i \vartheta^j \otimes \partial_i^0, & g_{ih}^\perp H_j^h &= g_{ih}^\perp H_j^h. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue da un calcolo in coordinate, impiegando la base  $(\lambda^0, \vartheta^i)$ .  $\square$

**Teorema 3.2.2** *Esiste un'unica connessione  $\Gamma : U_1 \mathbf{M} \longrightarrow T^* \mathbf{M} \otimes_{U_1 \mathbf{M}} VU_1 \mathbf{M}$  tale che*

$$\mathfrak{d} \lrcorner \Gamma = \gamma \quad \nu_\Gamma \bar{\wedge} \vartheta = \Omega, \quad A\Gamma = A\Gamma^\natural.$$

In particolare,

$$\Gamma = \Gamma^\natural + \Gamma^e,$$

ove

$$\Gamma^e = \Gamma_E^e + \Gamma_B^e = -\frac{q}{2mc} v^{\perp-1} \circ g^{\sharp 2} \circ (F + 4\tau^{\sharp} \wedge E);$$

ossia, in coordinate,

$$\Gamma^e = \frac{q}{2mc^2 \alpha} g_{\perp}^{ij} (E_j \tau^{\sharp} - B_{hj} \vartheta^h) \otimes \partial_i^0.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dai lemmi precedenti e dalle espressioni di  $\gamma$  and  $\Omega$ .  $\square$  **QED**

**Osservazione 3.2.4** Non verrà formulata, in accordo con quanto detto nell'introduzione, la seconda equazione dei campi. Si rimanda a [HaEl73, MTW70, SaWu76] per un'analisi approfondita da un punto di vista matematico e fisico del soggetto.  $\square$

### 3.3 Meccanica delle particelle e sviluppi futuri

In analogia con la relatività generale galileiana, si introduce ora la legge di moto per le particelle test. Anche in questo caso, l'equazione è l'unica che può essere formulata tramite le strutture geometriche dello spazio-tempo.

**Assioma E.4** Si assume la seguente *legge di moto* per una particella  $(m, q) \in \mathbb{M} \times \mathbb{Q}$ , il cui moto è  $s \subset \mathbf{M}$ :

$$\nabla[\gamma]j_1 s := j_2 s - \gamma \circ j_1 s = 0. \quad \square$$

**Osservazione 3.3.1** La legge di moto si può anche scrivere nella forma

$$v^{\perp} \circ \nabla_{\gamma^{\sharp}} j s = f \circ j s.$$

È importante notare che la legge di moto può anche essere scritta come  $\nabla[K]_{Ts} T s = 0$ .  $\square$

**Osservazione 3.3.2** Anche in meccanica einsteiniana la costante di Planck permette di 'normalizzare' la 2-forma totale. Infatti, si ha, per una data massa  $m \in \mathbb{M}$ ,

$$\frac{m}{\hbar} \Omega : U_1 \mathbf{M} \longrightarrow \wedge^2 T^* U_1 \mathbf{M} . \quad \square$$

Ancora non è stata sviluppata, per il caso einsteiniano, una teoria dei bicomplessi lagrangiani che permetta di dare uno schema naturale per una teoria lagrangiana della meccanica relativistica. Tenendo conto del fatto che la successione naturale (A.9) ristretta a  $U_1 \mathbf{M}$  si decompone in modo naturale (osservazione 3.1.7), ci si aspettano risultati in analogia con il caso galileiano.

**PARTE III**

**STRUTTURE RELATIVISTICHE  
QUANTISTICHE**

## CAPITOLO 4

# CONNESSIONE QUANTISTICA IN RELATIVITÀ GENERALE DI GALILEI

Il problema della formulazione covariante (relativistica) della quantizzazione della meccanica classica di una particella è stato affrontato da parecchi autori (ad esempio [DuKü84, Kos70, Kuc80, Pru95, ScP177, Sni80, Woo92]). In questo capitolo, verranno introdotte le strutture geometriche necessarie per una formulazione relativistica della meccanica quantistica di una particella senza spin [JaMo93a, JaMo93b]. Tale formulazione è stata estesa al caso di una particella con spin in [CJM95].

A differenza di quanto fatto nel capitolo 2 per le strutture geometriche classiche, non viene postulata una distinta struttura geometrica quantistica. Infatti, da un punto di vista fisico è di particolare importanza lo studio delle strutture quantistiche che è possibile assegnare su di un dato spazio-tempo relativistico galileiano. Pertanto, verrà data una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di strutture quantistiche su di un dato spazio-tempo relativistico galileiano. Inoltre, nel caso in cui questa condizione sia soddisfatta, saranno classificate tutte le strutture quantistiche non equivalenti. I risultati saranno, poi, applicati alle soluzioni esatte studiate nel capitolo 2. I risultati di esistenza e classificazione delle strutture quantistiche sono stati sviluppati in [MoVi95, Vit96b], sulla base del teorema di Kostant–Soriau (si veda, ad esempio, [Gar79, Kos70]).

Si noti che in questo capitolo non è data la procedura completa di quantizzazione, ma sono descritte le strutture geometriche necessarie alla quantizzazione. Una completa formulazione del principio di corrispondenza si trova in [JaMo93a, JaMo93b].

## 4.1 Fibrato quantistico e connessione quantistica

Si assume una particella  $(m, q) \in \mathbb{M} \times \mathbb{Q}$ .

**Definizione 4.1.1** Un fibrato di linea complesso  $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathbf{E}$  sullo spazio-tempo, dotato di una metrica hermitiana  $h$ , è detto *fibrato quantistico*. □

Le storie quantistiche sono rappresentate dalle *sezioni quantistiche*  $\Psi : \mathbf{E} \longrightarrow \mathcal{Q}$ .

Una carta adattata su  $\mathcal{Q}$  complessa e normalizzata sarà denotata da  $(x^0, y^i, z)$ , e la corrispondente base locale per le sezioni quantistiche sarà indicata con  $b$ . Pertanto, una sezione quantistica ha l'espressione in coordinate  $\Psi = \psi b$ .

Si denoti con

$$\mathfrak{H} : \mathcal{Q} \longrightarrow V\mathcal{Q} \simeq \mathcal{Q} \times_{\mathbf{E}} \mathcal{Q} : q \longmapsto (q, q)$$

la *forma di Liouville* su  $\mathcal{Q}$ .

**Definizione 4.1.2** Una connessione  $\mathcal{C}$  sul fibrato

$$\mathcal{Q}^\dagger := J_1\mathbf{E} \times_{\mathbf{E}} \mathcal{Q} \longrightarrow J_1\mathbf{E}$$

con le seguenti proprietà:

1.  $\mathcal{C}$  è lineare hermitiana;
2.  $\mathcal{C}$  è universale (appendice A.7);
3. la curvatura di  $\mathcal{C}$  soddisfa l'equazione:

$$R[\mathcal{C}] = i\frac{m}{\hbar}\Omega \otimes \mathfrak{H} : \mathcal{Q}^\dagger \longrightarrow \overset{2}{\wedge} T^*J_1\mathbf{E} \otimes_{J_1\mathbf{E}} \mathcal{Q}^\dagger,$$

è detta *connessione quantistica*. □

Gli oggetti geometrici introdotti nelle due definizioni precedenti sono sufficienti ad una formulazione relativistica della meccanica quantistica di una particella scalare. Pertanto, una coppia  $(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$  è detta *struttura quantistica*. Due strutture quantistiche  $(\mathcal{Q}_1, \mathcal{C}_1)$ ,  $(\mathcal{Q}_2, \mathcal{C}_2)$  si dicono equivalenti se esiste un isomorfismo di fibrati di linea complessi Hermitiani  $f : \mathcal{Q}_1 \longrightarrow \mathcal{Q}_2$  che mappa  $\mathcal{C}_1$  in  $\mathcal{C}_2$ .

Si noti che la prima equazione dei campi  $d\Omega = 0$  è l'identità di Bianchi per una connessione quantistica  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 4.1.1** Per ogni aperto stellato  $U \subset \mathbf{E}$ , scelta una banalizzazione dell'intorno tubolare di  $\mathcal{Q}$  al di sopra di  $U$ , si ha

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_U'' + i\tau_U \otimes \mathfrak{H}$$

dove  $\mathfrak{U}''$  è la connessione piatta su  $\mathbf{Q}^\dagger$  indotta sull'intorno tubolare dalla banalizzazione, e  $\tau_{\mathbf{U}}$  è una forma di Poincaré–Cartan sull'intorno tubolare  $t_0^{-1}(\mathbf{U}) \subset J_1\mathbf{E}$ .

DIMOSTRAZIONE. Infatti, l'espressione in coordinate di una connessione  $\mathfrak{U}$  sul fibrato  $\mathbf{Q}^\dagger$  lineare hermitiana è

$$\mathfrak{U} = d^\lambda \otimes \partial_\lambda + d_0^i \otimes \partial_i^0 + i\mathfrak{U}_\lambda d^\lambda \otimes \mathfrak{H} + i\mathfrak{U}_i^0 d_0^i \otimes \mathfrak{H} ,$$

e l'universalità è espressa da  $\mathfrak{U}_i^0 = 0$ .

La curvatura di una connessione  $\mathfrak{U}$  su  $\mathbf{Q}^\dagger$  lineare hermitiana universale è espressa da

$$R[\mathfrak{U}] = i\partial_\lambda \mathfrak{U}_\mu d^\lambda \wedge d^\mu \otimes \mathfrak{H} + i\partial_i^0 \mathfrak{U}_\mu d_0^i \wedge d^\mu \otimes \mathfrak{H} ,$$

da cui è evidente il risultato.  $\square$

L'espressione in coordinate di una connessione quantistica  $\mathfrak{U}$  è, pertanto

$$\mathfrak{U} = d^\lambda \otimes \partial_\lambda + d_0^i \otimes \partial_i^0 + i\frac{m}{\hbar} \left( -\frac{1}{2}g_{ij}y_0^i y_0^j d^0 + g_{ij}y_0^i d^j + a_\lambda d^\lambda \right) \otimes \mathfrak{H} ,$$

dove  $a = a_\lambda u^0 \otimes d^\lambda : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes T^*\mathbf{E}$  è una particolare scelta (determinata da  $\mathfrak{U}$ ) di un potenziale locale di  $\Phi := 2o^*\Omega$ , in cui  $o$  è l'osservatore indotto dalla carta. Riferendosi alle mappe introdotte nella sezione 2.3, si ha anche  $\mathfrak{U}_0 = -H/(u_0\hbar)$ ,  $\mathfrak{U}_j = p_j/(u_0\hbar)$ .

Ora, si studia il comportamento della connessione quantistica  $\mathfrak{U}$  rispetto ad un cambiamento di carta. Pertanto, siano  $\mathbf{U}_1$  e  $\mathbf{U}_2$  due aperti stellati coordinati in  $\mathbf{E}$  tali che  $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 \neq \emptyset$ , e siano  $b_1$  e  $b_2$  le basi locali per le sezioni quantistiche indotte dalla scelta di due banalizzazioni rispettivamente degli intorni tubolari di  $\mathbf{Q}$  al di sopra di  $\mathbf{U}_1$  e  $\mathbf{U}_2$ . Supponiamo che il cambiamento di base sia espresso dalla funzione  $c_{12}$ , o, equivalentemente, dalla funzione  $f_{12}$ , nel modo che segue

$$\begin{aligned} b_1 &= c_{12}b_2 = \exp(2\pi i f_{12})b_2 , \\ c_{12} : \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 &\longrightarrow U(1) : x \longmapsto \exp(2\pi i f_{12}) , \\ f_{12} : \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 &\longrightarrow \mathbb{R} . \end{aligned}$$

In accordo con il precedente teorema, sia, nell'intersezione degli intorni tubolari,

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1'' + i\tau_1 \otimes \mathfrak{H} = \mathfrak{U}_2'' + i\tau_2 \otimes \mathfrak{H} .$$

**Proposizione 4.1.1** *Si ha*

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_1'' &= \mathfrak{U}_2'' - 2\pi i df_{12} \otimes \mathfrak{H} \\ \tau_1 &= \tau_2 + 2\pi i df_{12} \otimes \mathfrak{H} \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. La prima equazione viene dal cambiamento di coordinate di una connessione lineare, e la seconda viene dall'identità che precede l'enunciato.  $\square$

Sia  $(\mathbf{Q}, \mathfrak{U})$  una struttura quantistica. È possibile derivare covariantemente sezioni quantistiche tramite il pull-back. Sia  $\Psi$  una sezione quantistica. Si ha

$$\nabla[\mathfrak{U}]\Psi : J_1\mathbf{E} \longrightarrow T^*\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{E}} \mathbf{Q} ,$$

con l'espressione in coordinate

$$\nabla[\mathfrak{U}]\Psi = ((\partial_0\psi + iH/(u_0\hbar)\psi)d^0 + (\partial_j\psi - ip_j/(u_0\hbar)\psi)d^j) \otimes b .$$

È possibile applicare al morfismo fibrato  $\nabla[\mathfrak{U}]\Psi$  le proiezioni  $h$  e  $v$  definite nel capitolo I, ottenendo i morfismi fibrati

$$h(\nabla[\mathfrak{U}]\Psi) : J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes \mathbf{Q} \quad v(\nabla[\mathfrak{U}]\Psi) : J_1\mathbf{E} \longrightarrow \text{im } \vartheta_1 \otimes_{J_1\mathbf{E}} \mathbf{Q}$$

con le espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} h(\nabla[\mathfrak{U}]\Psi) &= (\mathfrak{A}_0.\psi - i(L/(u^0\hbar))\psi)u^0 \otimes b \\ v(\nabla[\mathfrak{U}]\Psi) &= (\partial_i/\psi - i(p_i/(u^0\hbar))\psi)\vartheta^i \otimes b \end{aligned}$$

Si hanno i seguenti morfismi fibrati naturali su  $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\Psi} &:= \frac{1}{2} \left( h \left( \Psi, i\overset{\circ}{\nabla}\Psi \right) + h \left( i\overset{\circ}{\nabla}\Psi, \Psi \right) \right) \nu : J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{L}^3 \otimes \overset{4}{\wedge} T^*\mathbf{E} , \\ \check{\mathcal{L}}_{\Psi} &:= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m} \left( ((\bar{g} \circ \vartheta_1) \otimes h) (\check{\nabla}\Psi, \check{\nabla}\Psi) \right) \nu : J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{L}^3 \otimes \overset{4}{\wedge} T^*\mathbf{E} , \end{aligned}$$

ove  $\nu$  è la forma volume naturale su  $\mathbf{E}$ .

**Teorema 4.1.2** *Sia  $(\mathbf{Q}, \mathfrak{U})$  una struttura quantistica. Allora, per ogni sezione quantistica  $\Psi$ , esiste un'unica combinazione lineare  $\mathcal{L}_{\psi}$  di  $\check{\mathcal{L}}_{\Psi}$  e  $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\Psi}$  (a meno di un fattore scalare) che si proietta su  $\mathbf{E}$ , cioè*

$$\mathcal{L}_{\psi} := \overset{\circ}{\mathcal{L}}_{\Psi} - \check{\mathcal{L}}_{\Psi} .$$

Si noti che il morfismo fibrato  $\mathcal{L}_{\psi}$  induce il morfismo fibrato

$$\mathcal{L} : J_1\mathbf{Q} \longrightarrow \mathbb{L}^3 \otimes \overset{4}{\wedge} T^*\mathbf{E} ,$$

che ha l'espressione in coordinate

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left( -\frac{\hbar}{m} g^{ij} \bar{z}_i z_j - i(\bar{z}_0 z - \bar{z} z_0) + \right. \\ & \left. + i a^i (\bar{z}_i z - \bar{z} z_i) + \frac{m}{\hbar} (2a_0 - a_i a^i) \bar{z} z \right) \sqrt{|g|} d^0 \wedge d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 . \end{aligned}$$

**Definizione 4.1.3** Sia  $(\mathbf{Q}, \mathfrak{U})$  una struttura quantistica. Il morfismo fibrato  $\mathcal{L}$  indotto da  $\mathfrak{U}$  è detto *lagrangiana quantistica* associata a  $(\mathbf{Q}, \mathfrak{U})$ . L'equazione di Eulero–Lagrange

$$\mathcal{E} \circ j_1 \Psi = 0 ,$$

indotta dal morfismo di Eulero–Lagrange

$$\mathcal{E} : J_1 \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbb{L}^3 \otimes \text{im } \vartheta_1 \wedge \wedge^4 T^* \mathbf{E}$$

corrispondente a  $\mathcal{L}$  (per una definizione si veda [Cos94]), è detta *equazione di Schroedinger generalizzata*.  $\square$

L'espressione in coordinate dell'equazione di Schroedinger generalizzata è la seguente

$$\begin{aligned} 0 = & \mathcal{E} \circ j_2 \Psi \\ = & 2 \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( i \partial_0 \psi + \frac{m}{u_0 \hbar} a_0 \psi + \frac{1}{2} i \frac{\partial_0 \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} \psi + \right. \\ & \left. + \frac{u_0 \hbar}{2m} \left( g^{ij} \left( \partial_{ij} \psi - 2i \frac{m}{u_0 \hbar} a_i \partial_j \psi - \left( i \frac{m}{\hbar} \partial_i a_j + \frac{m^2}{\hbar^2} a_i a_j \right) \psi \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial_i (g^{ij} \sqrt{|g|})}{\sqrt{|g|}} \left( \partial_j \psi - i \frac{m}{\hbar} a_j \psi \right) \right) \right) \vartheta^b \wedge d^0 \wedge d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \end{aligned}$$

in cui  $\vartheta^b := z - z_0 d^0$ . Questa equazione si riduce all'equazione di Schroedinger standard nel caso di una soluzione esatta newtoniana per cui  $K^{\natural} = K^{\natural}$  e  $\tau = 0$ .

Questa sezione termina con un breve sunto della procedura di quantizzazione covariante mediante gli oggetti geometrici sin qui introdotti, sviluppata in [JaMo93a, JaMo93b].

Può essere introdotta un'algebra di Lie di funzioni su  $J_1 \mathbf{E}$ , l'*algebra delle funzioni quantizzabili*, costituita da un tipo particolare di polinomi di secondo grado rispetto alla struttura affine di  $J_1 \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ . L'operazione di algebra è costruita mediante la forma cosimplettica in modo simile a quanto si fa con le strutture di contatto su una varietà [God69].

La connessione quantistica dà un isomorfismo di questa algebra con una particolare algebra di campi vettoriali su  $\mathbf{Q}$ , l'*algebra dei campi vettoriali quantistici*. Tale algebra

può essere vista come un'algebra di operatori quantistici su opportuni spazi funzionali. Tra questi operatori è compreso anche l'operatore di Schroedinger. In tal modo, si ottiene una formulazione covariante del principio di corrispondenza.

## 4.2 Esistenza di connessioni quantistiche

In questa sezione sarà data una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un fibrato quantistico e una connessione quantistica.

Il risultato di esistenza ed unicità generalizza il teorema di Kostant–Soriau [Kos70] al caso di una teoria meccanica relativistica generale su di uno spazio-tempo con tempo assoluto. Come ci si può aspettare, si trova un risultato simile, che però coinvolge la topologia dello spazio-tempo, piuttosto che la topologia dello spazio delle configurazioni. Nel caso relativistico, giocano un ruolo fondamentale le proprietà della forma di Poincaré–Cartan. La presentazione del teorema di Kostant–Soriau che è stata seguita è dovuta a [Gar79]. I risultati qui esposti sono stati sviluppati in [Vit96b].

La sezione inizia studiando l'insieme delle classi di equivalenza di fibrati di linea complessi. Due fibrati di linea complessi  $Q, Q'$  su  $E$  si dicono *equivalenti* se esiste un isomorfismo di fibrati complessi  $f : Q \longrightarrow Q'$  su  $M$ . Si denoti con  $\mathcal{L}(E)$  l'insieme delle classi di equivalenza di fibrati di linea complessi. Tale insieme ha una struttura di gruppo abeliano rispetto al prodotto tensoriale su  $\mathbb{C}$ .

Due fibrati complessi di linea hermitiani su  $E$  si dicono equivalenti se sono equivalenti nel senso detto sopra mediante un isomorfismo che conserva le metriche hermitiane.

**Osservazione 4.2.1** In un fibrato di linea complesso, tutte le metriche hermitiane sono equivalenti. Ciò dipende dal fatto che la dimensione complessa delle fibre è 1. Quindi l'insieme  $\mathcal{L}(E)$  coincide con l'insieme delle classi di equivalenza di fibrati complessi di linea hermitiani.  $\square$

Si denoti con  $\mathcal{O}$  il fascio delle funzioni  $C^\infty$  da aperti di  $E$  a valori in  $\mathbb{C}$ , e con  $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}$  il sottofascio delle funzioni mai nulle.

**Lemma 4.2.1** *Esiste un isomorfismo di gruppi abeliani naturale*

$$\kappa : \mathcal{L}(E) \longrightarrow H^2(E, \mathbb{Z})$$

[Gar79, Wel80].

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, le funzioni di transizione di un fibrato di linea  $Q \longrightarrow E$  definiscono una 1-coccatena chiusa a valori nel fascio  $\mathcal{O}$ , e pertanto un elemento di  $H^1(E, \mathcal{O}^*)$ . Si può vedere che tale elemento dipende solamente da  $[Q] \in \mathcal{L}(E)$ .

Si consideri la soluzione esatta di fasci su  $E$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 ,$$

ove  $e$  è il morfismo di fasci suriettivo dato da  $e(f) = \exp 2\pi i f$ . Si ha la successione esatta in coomologia

$$H^1(\mathbf{E}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathbf{E}, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta_1} H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbf{E}, \mathcal{O})$$

ove  $\delta_1$  è l'operatore di Bockstein. Essendo  $\mathcal{O}$  fine, si ha  $H^1(\mathbf{E}, \mathcal{O}) = H^2(\mathbf{E}, \mathcal{O}) = 0$ , pertanto  $\delta_1$  dà l'isomorfismo cercato.  $\square$

**Osservazione 4.2.2** In [Wel80] è dimostrato come gli elementi di  $H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z})$  possano essere identificati con le prime classi di Chern dei fibrati complessi di linea.  $\square$

**Lemma 4.2.2** *Si ha un isomorfismo*

$$H_{de\ Rham}^2(\mathbf{E}) \simeq H^2(J_1\mathbf{E}, \mathbb{R}) \simeq H^2(\mathbf{E}, \mathbb{R})$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, mediante una sezione globale di  $J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$  è possibile realizzare  $\mathbf{E}$  come un retratto differenziabile di  $J_1\mathbf{E}$ .  $\square$

In particolare, è possibile dare esplicitamente la classe corrispondente a  $[\frac{m}{\hbar}\Omega]$  in  $H^2(\mathbf{E}, \mathbb{R})$  senza passare attraverso una sezione globale di  $J_1\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ .

**Lemma 4.2.3** *La classe di equivalenza  $[\frac{m}{\hbar}\Omega] \in H_{de\ Rham}^2(\mathbf{M})$  della 2-forma totale  $\Omega$  determina una classe*

$$[c]_{[\frac{m}{\hbar}\Omega]} \in H^2(\mathbf{E}, \mathbb{R}) .$$

DIMOSTRAZIONE. Si procede replicando la dimostrazione del teorema dato nella sottosezione A.5 dell'appendice.

Si consideri un ricoprimento buono  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  localmente finito di  $\mathbf{E}$ ;  $\{t_0^{i-1}(U_i)\}_{i \in I}$  è un ricoprimento buono di  $J_1\mathbf{E}$ . Si scelga su ogni aperto di quest'ultimo ricoprimento una forma di Poincaré–Cartan  $\tau_i$  di  $\Omega$ . Per ogni  $i, j \in I$  tali che  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , in virtù della proprietà della forma di Poincaré–Cartan data nel corollario 2.3.1, si scelga una funzione  $f_{ij} \in C^\infty(\mathbf{E})$  potenziale della 1-forma chiusa  $\tau_i - \tau_j$  su  $\mathbf{E}$ . La 2-cocatena  $c$  definito così: per ogni  $i, j, k \in I$  tali che  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$  sia  $c_{ijk} := f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}$ , è chiuso. Si può agevolmente dimostrare, con le stesse tecniche del teorema dato in A.5, che la classe  $[c]_{[\frac{m}{\hbar}\Omega]}$  dipende solo dalla classe  $[\frac{m}{\hbar}\Omega]$ .  $\square$

Si rammenti, ora, che l'inclusione di gruppi abeliani  $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$  determina un morfismo di gruppi abeliani

$$i : H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbf{E}, \mathbb{R})$$

che non è necessariamente un morfismo iniettivo, a causa della torsione [BoTu82]. Pertanto, non è possibile identificare  $H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z})$  con la sua immagine  $i(H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z})) \subset H^2(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ .

**Teorema 4.2.1** *Le seguenti condizioni si equivalgono.*

1. *Esiste una struttura quantistica  $(\mathbf{Q}, \mathfrak{C})$ .*
2. *La forma chiusa  $\frac{m}{\hbar}\Omega$  determina una classe di coomologia nel sottogruppo*

$$\left[\frac{m}{\hbar}\Omega\right] \in i(H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z})) \subset H^2(\mathbf{E}, \mathbb{R})$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento buono localmente finito di  $\mathbf{E}$ . Si supponga valida la seconda condizione del teorema. Allora, si osserva che il morfismo  $i : H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbf{E}, \mathbb{R})$  è dato così:

$$i([c]) = [i(c)] ,$$

ove  $i(c)$  è la cocatena tale che, per ogni  $i, j, k \in I$  con  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$  sia  $(i(c))_{ijk} := i(c_{ijk})$ .

Pertanto, esistono funzioni  $f_{ij}, f_{jk}, f_{ik}$  come nel lemma precedente tali che  $(f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}) \in \mathbb{Z}$ . Si ponga

$$c_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow U(1) : x \longmapsto \exp 2\pi i f_{ij}$$

Si ha  $c_{ij}c_{jk} = c_{ik}$ , quindi resta definito una 1-cocatena chiusa su  $\mathbf{E}$ , che dà luogo ad una classe di isomorfismi di fibrato complesso di linea hermitiano su  $\mathbf{E}$   $[\mathbf{Q}] \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ .

Inoltre, si ha

$$\tau_i - \tau_j = df_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \frac{dc_{ij}}{c_{ij}};$$

così, le 1-forme  $i\tau_i \otimes \mathfrak{H}$  danno una connessione quantistica globale.

Viceversa, se la prima condizione del teorema vale, usando (4.1.1) in ogni tubo  $t_0^{1-1}(U_i)$  della banalizzazione al di sopra del ricoprimento buono si ha

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'' + i\tau_i \otimes \mathfrak{H}$$

ove  $\mathfrak{C}''$  è la connessione locale piatta indotta dalla banalizzazione. Quindi, le funzioni  $f_{ij}$  definite nella proposizione 4.1.1 danno luogo alle funzioni costanti  $f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}$  con valori in  $\mathbb{Z}$ , e quindi ad una classe  $[c]_{[\frac{m}{\hbar}\Omega]} \in i(H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z}))$ .  $\square$

### 4.3 Classificazione delle connessioni quantistiche

Questa sezione è basata su risultati presentati in [Gar79], e adattati al caso relativistico in [Vit96b].

Affinché possano esistere strutture quantistiche su di uno spazio-tempo galileiano, deve essere soddisfatta la condizione di integralità di  $[m/\hbar \Omega]$  del teorema precedente. Pertanto, in questa sezione si introdurrà un nuovo assioma in cui tale proprietà sarà postulata, e poi si studierà la struttura dell'insieme delle strutture quantistiche non equivalenti che è possibile costruire sullo spazio-tempo galileiano  $\mathbf{E}$  (e quindi, strutture quantistiche le cui connessioni quantistiche hanno la curvatura proporzionale alla 2-forma totale  $\Omega$ ).

**Assioma E.5** Si assume che la 2-forma totale  $\Omega$  soddisfi la seguente *condizione di integralità*:

$$[\frac{m}{\hbar}\Omega] \in i(H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z})) \subset H^2(\mathbf{E}, \mathbb{R}) . \quad \square$$

Si introducono, ora, le seguenti notazioni. Si denoti con  $\mathcal{QS}$  l'insieme delle classi di equivalenza di strutture quantistiche. Per il lemma 4.2.1, le classi di equivalenza di fibrati quantistici compatibili con la 2-forma totale  $\Omega$  sono date dalla controimmagine mediante  $i : H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbf{E}, \mathbb{R})$  della classe  $[\frac{m}{\hbar}\Omega]$ . Si ponga  $\mathcal{QB} := i^{-1}([\frac{m}{\hbar}\Omega]) \subset H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z})$ .

**Proposizione 4.3.1** *L'insieme  $\mathcal{QB}$  dei fibrati quantistici compatibili con  $\Omega$  ha una struttura naturale di spazio affine associato al gruppo abeliano  $\ker i \subset H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z})$ .*

Si ha la proiezione naturale

$$\text{pro}_b : \mathcal{QS} \longrightarrow \mathcal{QB} . \quad (4.1)$$

Tale proiezione permette di ripartire  $\mathcal{QS}$  nei sottoinsiemi delle strutture quantistiche che hanno fibrati quantistici nella stessa classe di equivalenza in  $\mathcal{QB}$ .

**Lemma 4.3.1** *Siano  $(\mathbf{Q}, \Psi)$  e  $(\mathbf{Q}, \Psi')$  due strutture quantistiche con lo stesso fibrato quantistico  $\mathbf{Q}$ . Allora la differenza  $\Psi' - \Psi$  definisce una 1-forma chiusa*

$$D : \mathbf{E} \longrightarrow T^*\mathbf{E}$$

mediante l'equazione

$$2\pi i D\mathfrak{x} = \Psi' - \Psi .$$

**DIMOSTRAZIONE.** Il requisito di universalità e l'espressione in coordinate di una connessione quantistica implicano che  $D$  è una 1-forma su  $\mathbf{E}$ . Usando l'equazione  $R[\Psi] = R[\Psi']$ , si vede che le proprietà algebriche della parentesi di Frölicher–Nijenhuis danno  $[D, D] = dD = 0$ .  $\square$

In particolare, si ha in coordinate

$$D = \frac{m}{2\pi\hbar}(a'_\lambda - a_\lambda)d^\lambda .$$

**Proposizione 4.3.2** *Due strutture quantistiche  $(\mathbf{Q}, \Psi)$  e  $(\mathbf{Q}', \Psi')$  sono equivalenti se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

1. I fibrati quantistici  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q}'$  sono isomorfi;

2. se  $\tilde{f} : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}'$  è un isomorfismo di fibrati complessi hermitiani, la 1-forma  $D$  su  $\mathbf{E}$  (vedere il lemma precedente) definita da

$$2\pi i D_{\mathfrak{H}} = \mathfrak{C}' - f_* \mathfrak{C}$$

è del tipo  $D = -\frac{1}{2\pi i} \frac{dc}{c}$  per  $c : \mathbf{E} \longrightarrow U(1) \subset \mathbb{C}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La prima condizione è ovvia. Se vale la prima condizione, e se  $\tilde{f} : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}'$  è un isomorfismo di fibrati complessi hermitiani, allora è possibile considerare la struttura quantistica  $(\mathbf{Q}', f_* \mathfrak{C})$ , equivalente a  $(\mathbf{Q}, \mathfrak{C})$  (si veda [KoNo63] per la definizione di  $f_*$ ). Ora, il gruppo degli automorfismi di  $\mathbf{Q}'$  che preservano la struttura hermitiana è in biezionone con il gruppo delle funzioni  $c : \mathbf{E} \longrightarrow U(1) \subset \mathbb{C}$ .

Localmente, un automorfismo che rende equivalenti le due strutture quantistiche può essere visto come un cambiamento di coordinate, e quindi, dalla proposizione 4.1.1 si ha la tesi.  $\square$

**Lemma 4.3.2** *Esiste un isomorfismo di gruppi abeliani*

$$H^1(\mathbf{E}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \frac{dc}{c} \mid c : \mathbf{E} \longrightarrow U(1) \subset \mathbb{C} \right\} .$$

**DIMOSTRAZIONE.** Con un procedimento è simile alla dimostrazione della condizione di esistenza di strutture quantistiche si può dimostrare che  $\left\{ -\frac{1}{2\pi i} \frac{dc}{c} \mid c : \mathbf{E} \longrightarrow U(1) \subset \mathbb{C} \right\}$  è isomorfo a  $i(H^1(\mathbf{E}, \mathbb{Z}))$ . La tesi segue sfruttando l'operatore di Bockstein indotto dalla successione esatta di fasci costanti

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\exp 2\pi i} U(1) \longrightarrow 0 \quad (4.2)$$

per dimostrare che  $i : H^1(\mathbf{E}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathbf{E}, \mathbb{R})$  è un isomorfismo.  $\square$

Mediante i due risultati precedenti, il seguente teorema è immediato.

**Teorema 4.3.1** *Per ogni classe di equivalenza  $[\mathbf{Q}] \in \mathcal{QB}$  l'insieme delle classi di equivalenza in  $\text{pro}_b^{-1}([\mathbf{Q}])$  ha una struttura naturale di spazio affine associato al gruppo abeliano*

$$G := H^1(\mathbf{E}, \mathbb{R}) / H^1(\mathbf{E}, \mathbb{Z}) .$$

Se  $[D] \in G$  e  $[\mathbf{Q}, \mathfrak{C}] \in \text{pro}_b^{-1}([\mathbf{Q}])$ , l'operazione di spazio affine è definita da

$$[\mathbf{Q}, \mathfrak{C}] \cdot [D] := [\mathbf{Q}, \mathfrak{C} + 2\pi i D_{\mathfrak{H}}] .$$

In questo modo, è stata individuata la struttura di ogni 'fibra' determinata dalla proiezione naturale  $\text{pro}_b$ . La struttura di  $\mathcal{QB}$  è già stata studiata prima. Il passo finale di questa sezione consiste nell'individuare la struttura dell'insieme  $\mathcal{QS}$ .

SI consideri la successione esatta (4.2). Passando alla coomologia, si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow H^1(\mathbf{E}, U(1)) \xrightarrow{\delta_1} \ker i \longrightarrow 0 .$$

**Lemma 4.3.3** *Per ogni classe di equivalenza  $[\mathbf{Q}] \in \ker i \subset H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z})$  l'insieme delle classi di equivalenza in  $\delta_1^{-1}([\mathbf{Q}])$  ha una struttura naturale di spazio affine associato al gruppo abeliano*

$$G := H^1(\mathbf{E}, \mathbb{R})/H^1(\mathbf{E}, \mathbb{Z}) .$$

Pertanto, si ha una analogia tra la struttura di  $\text{pro}_b : \mathcal{QS} \longrightarrow \mathcal{QB}$  e la struttura di  $\delta_1 : H^1(\mathbf{E}, U(1)) \longrightarrow \ker i$ .

**Teorema 4.3.2** *Esiste una biezione*

$$\mathcal{QS} \longrightarrow H^1(\mathbf{E}, U(1))$$

che conserva le proiezioni  $\text{pro}_b$  e  $\delta_1$ .

DIMOSTRAZIONE. La biezione può essere data costruendo due biezioni

$$\begin{aligned} \mathcal{QS} &\longrightarrow H^1(\mathbf{E}, \mathbb{R})/H^1(\mathbf{E}, \mathbb{Z}) \times \ker i , \\ H^1(\mathbf{E}, \mathbb{R})/H^1(\mathbf{E}, \mathbb{Z}) \times \ker i &\longrightarrow H^1(\mathbf{E}, U(1)) . \quad \square \end{aligned}$$

In particolare, si può osservare che il gruppo abeliano  $H^1(\mathbf{E}, U(1))$  coincide con il gruppo  $\text{Hom}(\pi_1(\mathbf{E}), U(1))$ . Pertanto, vale il seguente corollario.

**Corollario 4.3.1** *Se  $\mathbf{E}$  è semplicemente connessa, allora esiste un'unica classe di equivalenza di strutture quantistiche in  $\mathcal{QS}$ .*

È molto utile applicare il macchinario teorico sin qui prodotto ad alcuni esempi pratici.

**Esempio 4.3.1** (*Soluzioni esatte newtoniane*) Lo spazio-tempo newtoniano è topologicamente banale, pertanto la classe di equivalenza della forma totale  $\Omega$  in  $H^2(\mathbf{E}, \mathbb{R})$  è la classe nulla. La condizione di integralità è soddisfatta, quindi la soluzione esatta newtoniana è quantizzabile. Per il corollario 4.3.1, esiste un'unica classe di equivalenza di strutture quantistiche.  $\square$

**Esempio 4.3.2** (*Soluzione esatta a simmetria sferica*) Si consideri il fibrato quantistico banale

$$\mathbf{E}' \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbf{E}'$$

al di sopra dello spazio-tempo sfericamente simmetrico (capitolo 2). Scegliendo il potenziale globale

$$a = -(\mathbf{K}m)/r : \mathbf{L} \longrightarrow \mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^2 \otimes \mathbb{T}^*$$

della forma  $\Phi^\natural = 2o^*\Omega^\natural$  è possibile costruire una connessione quantistica  $\mathcal{U}$  su  $J_1\mathbf{E}' \times \mathbb{C}$ . Quindi, la condizione di integralità è soddisfatta poiché è stata esibita una struttura quantistica. Per il corollario 4.3.1, esiste un'unica classe di equivalenza di strutture quantistiche.

Il risultato è lo stesso di quello ottenuto in [Vit95a, Vit95b], ma con ipotesi molto più deboli. Infatti, in [Vit95a, Vit95b] sono state fatte ipotesi di simmetria sferica sul fibrato quantistico e sulla connessione quantistica per ottenere il risultato, mentre qui non è stata fatta alcuna ipotesi sulle strutture quantistiche: è stato sufficiente dimostrare l'esistenza di tali strutture, poiché, in virtù del teorema di classificazione 4.3.2, esiste una sola classe di equivalenza di strutture quantistiche sullo spazio-tempo sfericamente simmetrico.  $\square$

Gli esempi sin qui forniti gettano luce su molti aspetti che la teoria galileiana ha in comune con la teoria einsteiniana. L'indagine sulle soluzioni esatte è molto più interessante, da un punto di vista fisico, nel caso einsteiniano; è anche verso questa direzione che si concentreranno gli sforzi dell'autore.

## CAPITOLO 5

# CONNESSIONE QUANTISTICA IN RELATIVITÀ GENERALE EINSTEINIANA

La formulazione covariante della quantizzazione della meccanica classica di una particella può essere sviluppata nel caso einsteiniano per analogia con il caso galileiano, affrontato nel precedente capitolo. Questo problema è già stato affrontato da alcuni autori, tra cui, ad esempio [Pru92, Pru93, Pru95]. La maggiore difficoltà è rappresentata dal fatto che la definizione e la struttura dello spazio delle velocità nel caso einsteiniano sono molto più complicate del caso galileiano.

In questo capitolo, facendo uso della teoria sviluppata nel capitolo 3, saranno sviluppate le strutture geometriche necessarie alla formulazione covariante della quantizzazione della meccanica classica relativistica einsteiniana, e cioè il fibrato quantistico e la connessione quantistica, seguendo la trattazione in [Vit96b]. Inoltre, è presente uno studio delle condizioni di esistenza e della classificazione di strutture quantistiche, secondo le linee di [Gar79]. Infine, sono presenti alcuni esempi di rilevante interesse fisico [Vit96b].

### 5.1 Fibrato quantistico e connessione quantistica

Si assume una particella  $(m, q) \in \mathbb{M} \times \mathbb{Q}$ .

**Definizione 5.1.1** Un fibrato di linea complesso  $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{M}$  sullo spazio-tempo, dotato di una metrica hermitiana  $h$ , è detto *fibrato quantistico*.  $\square$

Le storie quantistiche sono rappresentate dalle *sezioni quantistiche*  $\Psi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{Q}$ .

Una carta adattata su  $\mathbb{Q}$  complessa e normalizzata sarà denotata da  $(x^0, x^i, z)$ , e la corrispondente base locale per le sezioni quantistiche sarà indicata con  $b$ . Pertanto, una sezione quantistica ha l'espressione in coordinate  $\Psi = \psi b$ .

Si denoti con

$$\pi : \mathbb{Q} \longrightarrow V\mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q} \times_M \mathbb{Q} : q \longmapsto (q, q)$$

la *forma di Liouville* su  $\mathbb{Q}$ .

**Definizione 5.1.2** Una connessione  $\mathfrak{C}$  sul fibrato

$$\mathcal{Q}^\dagger := U_1\mathbf{M} \times_M \mathcal{Q} \longrightarrow U_1\mathbf{M}$$

con le seguenti proprietà:

1.  $\mathfrak{C}$  è lineare hermitiana;
2.  $\mathfrak{C}$  è universale (appendice A.7);
3. la curvatura di  $\mathfrak{C}$  soddisfa l'equazione:

$$R[\mathfrak{C}] = i \frac{m}{\hbar} \Omega \otimes_{\mathfrak{H}} : \mathcal{Q}^\dagger \longrightarrow \wedge^2 T^*U_1\mathbf{M} \otimes_{U_1\mathbf{M}} \mathcal{Q}^\dagger,$$

è detta *connessione quantistica*. □

Una coppia  $(\mathcal{Q}, \mathfrak{C})$  è detta *struttura quantistica*. Due strutture quantistiche  $(\mathcal{Q}_1, \mathfrak{C}_1)$ ,  $(\mathcal{Q}_2, \mathfrak{C}_2)$  si dicono *equivalenti* se esiste un isomorfismo di fibrati di linea complessi Hermitiani  $f : \mathcal{Q}_1 \longrightarrow \mathcal{Q}_2$  che mappa  $\mathfrak{C}_1$  in  $\mathfrak{C}_2$ .

La prima equazione dei campi  $d\Omega = 0$  è l'identità di Bianchi per una connessione quantistica  $\mathfrak{C}$ .

**Teorema 5.1.1** Per ogni aperto stellato  $\mathbf{U} \subset \mathbf{M}$ , scelta una banalizzazione dell'intorno tubolare di  $\mathcal{Q}$  al di sopra di  $\mathbf{U}$ , si ha

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{\mathbf{U}}'' + i \frac{m}{\hbar} \tau_{\mathbf{U}} \otimes_{\mathfrak{H}}$$

dove  $\mathfrak{C}_{\mathbf{U}}''$  è la connessione piatta su  $\mathcal{Q}^\dagger$  indotta sull'intorno tubolare dalla banalizzazione, e  $\tau_{\mathbf{U}}$  è un potenziale di  $\Omega$  sull'intorno tubolare  $\pi^{1-1}(\mathbf{U}) \subset U_1\mathbf{M}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, l'espressione in coordinate di una connessione  $\mathfrak{C}$  sul fibrato  $\mathcal{Q}^\dagger$  lineare hermitiana è

$$\mathfrak{C} = d^\lambda \otimes \partial_\lambda + d_0^i \otimes \partial_i^0 + i \mathfrak{C}_\lambda d^\lambda \otimes_{\mathfrak{H}} + i \mathfrak{C}_i^0 d_0^i \otimes_{\mathfrak{H}},$$

e l'universalità è espressa da  $\mathfrak{C}_i^0 = 0$ .

La curvatura di una connessione  $\mathfrak{C}$  su  $\mathcal{Q}^\dagger$  lineare hermitiana universale è espressa da

$$R[\mathfrak{C}] = i \partial_\lambda \mathfrak{C}_\mu d^\lambda \wedge d^\mu \otimes_{\mathfrak{H}} + i \partial_i^0 \mathfrak{C}_\mu d_0^i \wedge d^\mu \otimes_{\mathfrak{H}},$$

da cui è evidente la tesi. □

Localmente, un potenziale della 2-forma totale  $\Omega$  è del tipo

$$\tau = (c^2 \tau^\natural + \frac{q}{mc} A) : U_1\mathbf{M} \longrightarrow (T^* \otimes \mathbb{L}^2) \otimes T^*U_1\mathbf{M},$$

ove  $A$  è un potenziale locale del campo elettromagnetico  $F$  e  $\tau^{\natural}$  è il potenziale naturale globale della 2-forma gravitazionale  $\Omega^{\natural}$ . L'espressione in coordinate di una connessione quantistica  $\mathfrak{C}$  è, pertanto,

$$\mathfrak{C} = d^\lambda \otimes \partial_\lambda + d_0^i \otimes \partial_i^0 + i \frac{m}{\hbar} \left( c\alpha (g_{0\lambda} + g_{i\lambda} x_0^i) d^\lambda + \frac{q}{mc} A_\lambda d^\lambda \right) \otimes \mathfrak{H},$$

dove  $A : \mathbf{M} \longrightarrow (\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{L}^{3/2} \otimes \mathbb{M}^{1/2}) \otimes T^* \mathbf{M}$  è una particolare scelta (determinata da  $\mathfrak{C}$ ) di un potenziale locale di  $F$ .

**Osservazione 5.1.1** Si noti che la 2-forma gravitazionale ha il potenziale globale  $\tau^{\natural}$ , pertanto, se  $F = 0$ , esiste sempre una connessione quantistica.  $\square$

Ora, si studia il comportamento della connessione quantistica  $\mathfrak{C}$  rispetto ad un cambiamento di carta. Pertanto, siano  $\mathbf{U}_1$  e  $\mathbf{U}_2$  due aperti stellati coordinati in  $\mathbf{M}$  tali che  $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 \neq \emptyset$ , e siano  $b_1$  e  $b_2$  le basi locali per le sezioni quantistiche indotte dalla scelta di due banalizzazioni rispettivamente degli intorni tubolari di  $\mathbf{Q}$  al di sopra di  $\mathbf{U}_1$  e  $\mathbf{U}_2$ . Supponiamo che il cambiamento di base sia espresso dalla funzione  $c_{12}$ , o, equivalentemente, dalla funzione  $f_{12}$ , nel modo che segue

$$\begin{aligned} b_1 &= c_{12} b_2 = \exp(2\pi i f_{12}) b_2, \\ c_{12} : \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 &\longrightarrow U(1) : x \longmapsto \exp(2\pi i f_{12}), \\ f_{12} : \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2 &\longrightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In accordo con il precedente teorema, sia, nell'intersezione degli intorni tubolari,

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1'' + i \frac{m}{\hbar} \tau_1 \otimes \mathfrak{H} = \mathfrak{C}_2'' + i \frac{m}{\hbar} \tau_2 \otimes \mathfrak{H}.$$

**Proposizione 5.1.1** *Si ha*

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1'' &= \mathfrak{C}_2'' - 2\pi i d f_{12} \otimes \mathfrak{H} \\ \tau_1 &= \tau_2 + 2\pi i d f_{12} \otimes \mathfrak{H} \end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE.** La prima equazione viene dal cambiamento di coordinate di una connessione lineare, e la seconda viene dall'identità che precede l'enunciato.  $\square$   $\square$

**Osservazione 5.1.2** A questo punto, sono state introdotte le strutture geometriche sullo spazio-tempo einsteiniano, in analogia alle strutture definite in precedenza sullo spazio-tempo galileiano. Si può proseguire cercando una lagrangiana quantistica, un'algebra delle funzioni quantizzabili, un'algebra di operatori quantistici. Ciò esula dagli scopi del presente lavoro; in questa sede saranno solamente esaminate le condizioni di esistenza e la classificazione delle strutture quantistiche nel caso einsteiniano.  $\square$

## 5.2 Esistenza di connessioni quantistiche

In questa sezione sarà data una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un fibrato quantistico e una connessione quantistica. Il lavoro sarà portato avanti in analogia con il caso relativistico galileiano [Gar79, Kos70]; in particolare, tutti i risultati del caso galileiano saranno recuperati nel caso einsteiniano.

Le nozioni di equivalenza per fibrati quantistici e connessioni quantistiche sono le stesse del caso galileiano. In particolare, vale il risultato del lemma 4.2.1. Non è vero, in generale, che  $H^2(J_1(\mathbf{M}, 1), \mathbb{R})$  è isomorfo a  $H^2(\mathbf{M}, \mathbb{R})$ , poichè le fibre di  $\pi^1 : J_1(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow \mathbf{M}$  sono diffeomorfe allo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , pertanto non è possibile realizzare  $\mathbf{M}$  come un retratto differenziabile delle fibre poichè la presenza di gruppi di coomologia non banali può essere un'ostruzione. Tuttavia, le fibre di  $U_1\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$  sono aperti nelle fibre di  $\pi^1 : J_1(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow \mathbf{M}$  diffeomorfi ad  $\mathbb{R}^n$ ; e comunque, la classe della 2-forma totale  $\Omega$  dipende solamente dalla classe della 2-forma elettromagnetica  $F$ .

**Lemma 5.2.1** *La classe di equivalenza  $[\frac{m}{\hbar}\Omega] \in H_{de\ Rham}^2(U_1\mathbf{M})$  della 2-forma totale  $\Omega$  è contenuta nel sottospazio vettoriale*

$$H_{de\ Rham}^2(\mathbf{M}) \subset H_{de\ Rham}^2(U_1\mathbf{M}) ,$$

ed è uguale alla classe  $[\frac{q}{\hbar c}F] \in H_{de\ Rham}^2(\mathbf{M})$ .

DIMOSTRAZIONE. Dal fatto che  $[\frac{m}{\hbar}\Omega] = [\frac{m}{\hbar}d\tau^{\natural} + \frac{q}{\hbar c}F] = [\frac{q}{\hbar c}F]$ .  $\square$

Mediante l'isomorfismo dato nella sottosezione A.5 dell'appendice, ad una classe  $[\frac{q}{\hbar c}F] \in H_{de\ Rham}^2(\mathbf{M})$  corrisponde un'unica classe  $[c]_{[\frac{q}{\hbar c}F]} \in H^2(\mathbf{M}, \mathbb{R})$ . Pertanto, è possibile dimostrare il risultato principale, in analogia con quanto fatto per il caso galileiano.

**Teorema 5.2.1** *Le seguenti condizioni si equivalgono.*

1. *Esiste una struttura quantistica  $(\mathbf{Q}, \mathfrak{U})$ .*
2. *La forma chiusa  $F$  determina una classe di coomologia nel sottogruppo*

$$[\frac{q}{\hbar c}F] \in i(H^2(\mathbf{M}, \mathbb{Z})) \subset H^2(\mathbf{M}, \mathbb{R})$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento buono localmente finito di  $\mathbf{M}$ . Si supponga valida la seconda condizione del teorema. Allora, procedendo come nel teorema analogo del caso galileiano, per ogni  $i \in I$  si possono scegliere potenziali  $A_i$  di  $F$  definiti su  $U_i$ , per ogni  $i, j \in I$  con  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  si possono scegliere potenziali  $f_{ij}$  di  $\frac{q}{\hbar c}(A_i - A_j)$  su  $U_i \cap U_j$  tali che per ogni  $i, j, k \in I$  con  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$  si ha  $(f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}) \in \mathbb{Z}$ . Si ponga

$$c_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow U(1) : x \longmapsto \exp 2\pi i f_{ij}$$

Si ha  $c_{ij}c_{jk} = c_{ik}$ , quindi resta definito una 1-cocatena chiusa su  $\mathbf{M}$ , che dà luogo ad una classe di isomorfismi di fibrato complesso di linea hermitiano su  $\mathbf{M}$   $[\mathbf{Q}] \in \mathcal{L}(\mathbf{M})$ .

Inoltre, si ha

$$\frac{q}{\hbar c}(A_i - A_j) = df_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \frac{dc_{ij}}{c_{ij}};$$

così, le 1-forme  $i(\frac{m}{\hbar}\tau^{\natural} + \frac{q}{\hbar c}A_i) \otimes \mathfrak{H}$  danno una connessione quantistica globale.

Viceversa, se la prima condizione del teorema vale, usando (4.1.1) in ogni tubo  $\pi^{1-1}(U_i)$  della banalizzazione di  $U_1\mathbf{M}$  al di sopra del ricoprimento buono si ha

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'' + i(\frac{m}{\hbar}\tau^{\natural} + \frac{q}{\hbar c}A_i) \otimes \mathfrak{H}$$

ove  $\mathfrak{C}''$  è la connessione locale piatta indotta dalla banalizzazione. Quindi, le funzioni  $f_{ij}$  definite nella proposizione 5.1.1 danno luogo alle funzioni costanti  $f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}$  con valori in  $\mathbb{Z}$ , e quindi ad una classe  $[c]_{[\frac{q}{\hbar c}F]} \in i(H^2(\mathbf{E}, \mathbb{Z}))$ .  $\square$

### 5.3 Classificazione delle connessioni quantistiche

Anche nel caso einsteiniano, si assume che la condizione di esistenza di strutture quantistiche sia soddisfatta.

**Assioma E.6** Si assume che la 2-forma elettromagnetica  $F$  soddisfi la seguente *condizione di integralità*:

$$[\frac{q}{\hbar c}F] \in i(H^2(\mathbf{M}, \mathbb{Z})) \subset H^2(\mathbf{M}, \mathbb{R}) . \quad \square$$

Si denoti con  $\mathcal{QS}$  l'insieme delle classi di equivalenza di strutture quantistiche, e con  $\mathcal{QB}$  l'insieme delle classi di equivalenza di fibrati quantistici compatibili con  $\Omega$ . Anche in questo caso si ha la proiezione naturale

$$\text{pro}_b : \mathcal{QS} \longrightarrow \mathcal{QB} .$$

I risultati sulla struttura di  $\mathcal{QS}$  e  $\mathcal{QB}$  sono gli stessi che sono stati ricavati nel caso galileiano. Per questo, verranno riassunti nel seguente teorema, rimandando al capitolo 4 per la dimostrazione.

**Teorema 5.3.1** *L'insieme  $\mathcal{QB}$  dei fibrati quantistici compatibili con  $F$  ha una struttura naturale di spazio affine associato al gruppo abeliano  $\ker i \subset H^2(\mathbf{M}, \mathbb{Z})$ .*

*Per ogni classe di equivalenza  $[\mathbf{Q}] \in \mathcal{QB}$  l'insieme delle classi di equivalenza in  $\text{pro}_b^{-1}([\mathbf{Q}])$  ha una struttura naturale di spazio affine associato al gruppo abeliano*

$$G := H^1(\mathbf{M}, \mathbb{R})/H^1(\mathbf{M}, \mathbb{Z}) .$$

*Esiste una biezione*

$$\mathcal{QS} \longrightarrow H^1(\mathbf{M}, U(1))$$

che conserva le proiezioni  $\text{pro}_b$  e  $\delta_1 : H^1(\mathbf{M}, U(1)) \longrightarrow \ker i$ .

Come per il caso galileiano, vale il seguente corollario.

**Corollario 5.3.1** *Se  $\mathbf{M}$  è semplicemente connesso, allora esiste un'unica classe di equivalenza di strutture quantistiche in  $\mathcal{QS}$ .*

Da un punto di vista fisico, è di notevole interesse lo studio di situazioni concrete.

**Esempio 5.3.1** (*Spazio-tempo di Minkowski, [SaWu76]*) Lo spazio-tempo di Minkowski è topologicamente banale, pertanto la classe di equivalenza di  $F$  in  $H^2(\mathbf{M}, \mathbb{R})$  è la classe nulla. La condizione di integralità è soddisfatta, quindi la soluzione esatta di Minkowski è quantizzabile. Per il corollario 5.3.1, esiste un'unica classe di equivalenza di strutture quantistiche.  $\square$

**Esempio 5.3.2** (*Spazio-tempo di Schwarzschild*) Lo spazio-tempo di Schwarzschild ha la topologia di  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  [SaWu76], pertanto è semplicemente connesso. Siccome  $F = 0$ , la condizione di integralità è soddisfatta, e per il corollario 5.3.1, esiste un'unica classe di equivalenza di strutture quantistiche, e cioè la classe determinata dal fibrato banale e dalla connessione quantistica costruita con la connessione piatta naturale e con  $\tau^{\natural}$ .

Si noti che, se lo spazio-tempo di Schwarzschild non fosse semplicemente connesso, anche essendo  $F = 0$  potrebbero esistere strutture quantistiche non equivalenti.  $\square$

**Esempio 5.3.3** (*Monopolo di Dirac*) Il monopolo di Dirac è un particolare tipo di campo elettromagnetico  $F$  costruito a partire dallo spazio-tempo di Minkowski  $\mathbf{M}$ . Si consideri un moto inerziale  $s \subset \mathbf{M}$ , cioè un sottospazio affine di dimensione 1 di tipo tempo, positivamente orientato. Tale moto induce un osservatore globale  $o : \mathbf{M} \longrightarrow U_1\mathbf{M}$  mediante la somma in  $\mathbf{M}$ , e quindi una decomposizione

$$\mathbf{M}' := \mathbf{M} \setminus \{s\} \longrightarrow \mathbb{T} \times \mathbf{P}' := \mathbb{T} \times (\mathbf{P} \setminus \{0\})$$

ove  $\mathbf{P}'$  è lo spazio delle configurazioni osservate da  $o$ , privato della configurazione corrispondente a  $s$ .

Seguendo il procedimento di [GöSc87], si costruisce una famiglia di 2-forme elettromagnetiche (chiuse) globali

$$\frac{q}{\hbar c} F_m : \mathbf{P}' \longrightarrow \wedge^2 T^* \mathbf{P}' ,$$

parametrizzata da  $m \in \mathbb{Z}$ , per la quale il campo elettrico si annulla identicamente. Si noti che  $F_m$  sono anche chiuse rispetto al codifferenziale, quindi soddisfano anche le equazioni di Maxwell non omogenee in assenza di materia.

Le 2-forme  $F_m$  soddisfano la condizione di integralità per costruzione; è possibile, pertanto, costruire un fibrato quantistico, associato al fibrato principale costruito in [GöSc87], ed una connessione quantistica.

Essendo lo spazio-tempo topologicamente equivalente a  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ , per il corollario 5.3.1 si deduce che per ogni  $m \in \mathbb{Z}$  esiste un'unica classe di strutture quantistiche equivalenti compatibili con  $F_m$ .

È interessante notare che, se  $m, n \in \mathbb{Z}$  e  $m \neq n$ , allora i fibrati quantistici costruiti in corrispondenza di  $F_m$  e  $F_n$  non sono isomorfi. Inoltre, è molto importante notare il fatto che il parametro intero non può essere interpretato come una massa, poiché la massa non compare nella costante di normalizzazione  $\frac{q}{hc}$ , necessaria per valutare la condizione di integralità.  $\square$

Questo capitolo apre la strada ad un'analisi approfondita della classificazione di strutture quantistiche nelle soluzioni esatte in relatività einsteiniana. Questo è uno dei settori di indagine attuali dell'autore.

# APPENDICE

## A.1 Spazi di unità di misura

Le teorie relativistiche devono essere formulate in modo esplicitamente invariante rispetto alla scelta delle unità di misura. In questa sezione vengono introdotti gli spazi che forniranno il modo di realizzare geometricamente tale invarianza.

Unità di misura omogenee possono essere sommate e moltiplicate per numeri reali; tuttavia, in qualche caso non esiste un'unità nulla, ed è possibile moltiplicare solo per numeri reali. Questo fatto porta a descrivere uno spazio di unità omogenee come uno spazio vettoriale di dimensione 1 o come la metà positivamente orientata di uno spazio vettoriale di dimensione 1 orientato. I campi tensoriali sullo spazio-tempo possono avere dimensioni fisiche; quindi deve essere necessario poter moltiplicare gli spazi di unità con gli spazi vettoriali prodotti dallo spazio-tempo. Queste considerazioni ispireranno le seguenti definizioni.

Si ricordi che  $\mathbb{R}^+$  è un semi-anello, cioè un semigruppato abeliano additivo rispetto all'addizione e un gruppo rispetto alla moltiplicazione.

**Definizione A.1.1** Una terna  $(\mathbb{S}, +, \cdot)$ , ove

$$+ : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S} \quad \cdot : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S} ,$$

sono tali che  $(\mathbb{S}, +)$  è un semi-gruppato abeliano e  $\forall u, v, w \in \mathbb{S}, \forall r, s \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned} (rs) u &= r (su) & 1 u &= u \\ (r + s) u &= ru + su & r (u + v) &= ru + rv , \end{aligned}$$

è detta *semi-spazio vettoriale*. □

Si noti che un elemento neutro per la somma  $0 \in \mathbb{U}$  può non esistere, e che ogni spazio vettoriale è anche un semi-spazio vettoriale.

Un semi-spazio vettoriale è detto *positivo* se la moltiplicazione non può essere estesa né a  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  né a  $\mathbb{R}$ . Ad esempio, dato uno spazio vettoriale  $V$ , una base  $(e_i)$  dà il semi-spazio vettoriale positivo

$$\mathbb{P} := \left\{ \sum_i r^i e_i \mid r^i \in \mathbb{R}^+ \right\} .$$

Molti concetti e risultati di algebra lineare e multilineare standard possono essere ripetuti per i semi-spazi vettoriali (mappe lineari e multilineari, basi, dimensione, prodotti tensoriali e dualità). Si può considerare il prodotto tensoriale (su  $\mathbb{R}^+$ ) di un semi-spazio vettoriale  $\mathbb{S}$  con uno spazio vettoriale  $\mathbb{V}$  (che è visto come un semi-spazio vettoriale su  $\mathbb{R}^+$ )

$$\mathbb{S} \otimes \mathbb{V}$$

Questo prodotto tensoriale ha la struttura naturale di spazio vettoriale data da

$$\begin{aligned} 0 &= 1 \otimes 0 \in \mathbb{S} \otimes \mathbb{V} & - (r \otimes u) &= r \otimes (-v) \\ 0(r \otimes u) &= 0 & (-s)(r \otimes u) &= s(r \otimes (-u)) . \end{aligned}$$

**Definizione A.1.2** Un semi-spazio vettoriale è detto *di dimensione 1* se è generato da un elemento non nullo su  $\mathbb{R}^+$  o su  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  o su  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Un semi-spazio vettoriale di dimensione 1 è detto *positivo* se è generato da un elemento non nullo su  $\mathbb{R}^+$ . Uno spazio vettoriale di dimensione 1 è un semi-spazio vettoriale di dimensione 1.

**Osservazione A.1.1** Si consideri uno spazio vettoriale orientato  $\mathbb{U}$  di dimensione 1 e il sotto semi-spazio vettoriale di dimensione 1 positivo  $\mathbb{U}^+ \subset \mathbb{U}$ ; se  $V$  è un altro spazio vettoriale si ottiene

$$\mathbb{U}^+ \otimes V = \mathbb{U} \otimes V .$$

Come caso particolare si ottiene

$$\mathbb{U}^+ \otimes \mathbb{R} = \mathbb{U} \otimes \mathbb{R} . \quad \square$$

Se  $\mathbb{P}$  è un semi-spazio vettoriale di dimensione 1 positivo, allora si ha l'isomorfismo naturale

$$\mathbb{P}^* \otimes \mathbb{P} \simeq \mathbb{R}^+ : \alpha \otimes v \longmapsto \alpha(v) .$$

Sia  $\mathbb{P}$  un semi-spazio vettoriale di dimensione 1 positivo e  $n \in \mathbb{N}$ . Allora una *radice  $n$ -esima di  $\mathbb{P}$*  è, per definizione, un semi-spazio vettoriale di dimensione 1 positivo  $\mathbb{P}^{1/n}$  insieme ad una mappa

$$\mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}^{1/n} : v \longmapsto v^{\frac{1}{n}}$$

e un isomorfismo  $\mathbb{R}^+$ -lineare

$$\overset{n}{\otimes} \mathbb{P}^{\frac{1}{n}} \longrightarrow \mathbb{P} ,$$

tale che la mappa indotta

$$\mathbb{P} \longrightarrow \prod^n \mathbb{P} \longrightarrow \prod^n \mathbb{P}^{\frac{1}{n}} \longrightarrow \otimes^n \mathbb{P}^{\frac{1}{n}} \longrightarrow \mathbb{P}$$

sia l'identità di  $\mathbb{P}$ . Si può facilmente vedere che, per ogni  $r \in \mathbb{R}^+$  e  $v \in \mathbb{P}$ ,

$$(rv)^{\frac{1}{n}} = r^{1/n} (v)^{\frac{1}{n}} .$$

Inoltre, si può vedere facilmente che, se  $\mathbb{P}^{1/n'}$  è un'altra radice  $n$ -esima di  $\mathbb{P}$ , allora c'è un unico isomorfismo  $\mathbb{R}^+$ -lineare  $\mathbb{P}^{1/n} \longrightarrow \mathbb{P}^{1/n'}$  che rende il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \otimes^n \mathbb{P}^{1/n} & \longrightarrow & \otimes^n \mathbb{P}^{1/n'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{P} \end{array}$$

Mediante un generatore di  $\mathbb{P}$  si può provare facilmente che esistono radici  $n$ -esime.

Siano  $m, n \in \mathbb{N}$ . Il semi-spazio vettoriale di dimensione 1 positivo

$$\mathbb{P}^{\frac{m}{n}} = \otimes^m \mathbb{P}^{\frac{1}{n}}$$

è detto *potenza  $m/n$ -esima di  $\mathbb{P}$* . Si noti che  $\mathbb{P}^0 = \mathbb{R}^+$ .

Per scrivere le formule in modo che assomiglino alla letteratura standard si adotta la notazione seguente. Se  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}'$  sono due semi-spazi vettoriali di dimensione 1 positivi e  $u \in \mathbb{P}, v \in \mathbb{P}'$ , allora si scrive

$$uv := u \otimes v ;$$

lo spazio  $\mathbb{P}^*$  è denotato anche da

$$\mathbb{P}^{-1} := \mathbb{P}^* ,$$

e si pone

$$1/u \in \mathbb{P}^{-1}$$

ove  $1/u$  è l'elemento *dual* di  $u \in \mathbb{P}$ , cioè l'unico  $1/u \in \mathbb{P}^{-1}$  tale che

$$\langle 1/u, u \rangle = 1 .$$

Un semi-spazio vettoriale di dimensione 1 positivo  $\mathbb{P}$  ha una struttura di varietà diffeomorfa a  $\mathbb{R}$ , con spazio tangente

$$T\mathbb{P} \simeq \mathbb{P} \times (\mathbb{P} \otimes \mathbb{R}) .$$

## A.2 Prodotto simmetrico di endomorfismi

Sia  $V$  uno spazio vettoriale tale che  $\dim V = n$ . Si rammenti che il *prodotto scatola* (si veda [Gre78]) di due endomorfismi  $a, b : V \longrightarrow V$  è, per definizione, la mappa lineare

$$a \square b : \overset{2}{\wedge} V \longrightarrow \overset{2}{\wedge} V : v \wedge w \longmapsto a(v) \wedge b(w) + b(v) \wedge a(w) .$$

Il prodotto scatola è un'operazione binaria bilineare simmetrica sullo spazio vettoriale degli endomorfismi di  $V$ , e si estende ad una operazione multilineare simmetrica, cioè è possibile definire il prodotto scatola di  $k$  endomorfismi di  $V$ . In particolare, si ha

$$\begin{aligned} \square^k a \square^h b : \overset{k+h}{\wedge} V &\longrightarrow \overset{k+h}{\wedge} V : \\ v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+h} &\longmapsto \\ \sum_{\sigma \in S_{k+h}} |\sigma| a(v_{\sigma(1)}) \wedge \dots \wedge a(v_{\sigma(k)}) \wedge b(v_{\sigma(k+1)}) \wedge \dots \wedge b(v_{\sigma(k+h)}) , \end{aligned}$$

dove  $S_{k+h}$  è l'insieme di tutte le permutazioni  $k+h$ . Inoltre, si ha  $\square^k a = \wedge^k a$ , così il prodotto scatola estende il  $k$ -esimo prodotto esterno di un endomorfismo [Gre78].

Un'interessante caratteristica del prodotto scatola è la seguente. Si supponga che  $V = W_1 \oplus W_2$ , con  $p_1 : V \longrightarrow W_1$  e  $p_2 : V \longrightarrow W_2$  le relative proiezioni. Allora, si ha la decomposizione

$$\overset{m}{\wedge} V = \bigoplus_{k+h=m} \overset{k}{\wedge} W_1 \wedge \overset{h}{\wedge} W_2 , \quad (\text{A.1})$$

ove  $\overset{k}{\wedge} W_1 \wedge \overset{h}{\wedge} W_2$  è il sottospazio di  $\overset{m}{\wedge} V$  generato dai prodotti esterni di elementi di  $\overset{k}{\wedge} W_1$  e  $\overset{h}{\wedge} W_2$ . Le proiezioni  $p_{k,h}$  relative alla precedente decomposizione sono le mappe

$$p_{k,h} = \frac{1}{k! h!} \square^k p_1 \square^h p_2 : \overset{m}{\wedge} V \longrightarrow \overset{k}{\wedge} W_1 \wedge \overset{h}{\wedge} W_2 .$$

## A.3 Fasci e coomologia

Questa sezione è dedicata allo sviluppo del materiale di base della teoria dei fasci, allo scopo di introdurre la teoria della coomologia dei fasci. Il materiale è tratto in larga parte da [Wel80], a meno che non sia specificato diversamente. Altri testi su questo soggetto sono [Bre67], [GuRo65]. Il materiale sulla coomologia di de Rham è stato tratto da [BoTu82].

In questa sezione,  $X$  denota uno spazio topologico, e  $\tau$  denota la topologia su  $X$ .

### A.3.a Fasci

**Definizione A.3.1** Sia  $\mathcal{S}'$  una classe i cui elementi siano insiemi, e si denoti con  $\mathcal{S}'^{\mathcal{S}'}$  la classe delle funzioni fra elementi di  $\mathcal{S}'$ .

La terna  $\mathcal{S} := (\mathcal{S}', \mathcal{S}'', r)$ , ove

1.  $\mathcal{S}''$  è una mappa  $\mathcal{S}'' : \tau \longrightarrow \mathcal{S}' : U \longmapsto \mathcal{S}''_U$ ;
2.  $r$  è una mappa  $r : \tau \times \tau \longrightarrow \mathcal{S}'\mathcal{S}' : (U, V) \longmapsto r_V^U : \mathcal{S}''_U \longrightarrow \mathcal{S}''_V$  tale che
  - $\forall U \in \tau \quad r_U^U = \text{id}_U$ ;
  - $\forall U, V, W \in \tau \quad (U \supset V \supset W \Rightarrow r_W^U = r_W^V \circ r_V^U)$ ;

è detta *prefascio*  $\mathcal{S}$  su  $X$ . □

Si noti che, per abuso di notazione, lo stesso simbolo  $\mathcal{S}$  sarà usato per denotare la classe  $\mathcal{S}'$  e la mappa  $\mathcal{S}''$ .

Siano  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$  due prefasci su  $X$ . Allora, un *morfismo*  $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$  di prefasci è, per definizione, una mappa  $f : \tau \longrightarrow \mathcal{T}^{\mathcal{S}} : U \longmapsto f_U : \mathcal{S}_U \longrightarrow \mathcal{T}_U$  (ove  $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$  è la classe delle funzioni da insiemi in  $\mathcal{S}$  a insiemi in  $\mathcal{T}$ ) che commuta con le restrizioni in modo ovvio. Il prefascio  $\mathcal{S}$  è un sottoprefascio di  $\mathcal{T}$  se c'è un morfismo  $i : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$  tale che le mappe  $i_U$  sono inclusioni.

**Definizione A.3.2** Sia  $\mathcal{S}$  un prefascio. Allora,  $\mathcal{S}$  è detto *fascio* su  $X$  se per ogni famiglia di aperti  $\{U_i\}_{i \in I}$  di  $X$  con  $U := \cup_{i \in I} U_i$ , si ha

1. se  $s, t \in \mathcal{S}_U$  e  $r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(t)$  per ogni  $i \in I$ , allora  $s = t$ ;
2. se, per ogni  $i \in I$  allora  $s_i \in \mathcal{S}_{U_i}$ , e se per ogni  $i, j \in I$  allora

$$r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j),$$

allora esiste  $s \in \mathcal{S}_U$  tale che per ogni  $i \in I$  si ha  $r_{U_i}^U(s) = s_i$ . □

Si noti che non tutti i prefasci sono anche fasci. In particolare, si può facilmente vedere che il prefascio delle funzioni limitate olomorfe su  $\mathbb{C}$  non è un fascio per il teorema di Liouville. La proprietà che caratterizza i fasci è violata poiché questo prefascio è stato definito per mezzo di una proprietà globale. Ma i prefasci di interesse in questo lavoro sono definiti localmente, ad esempio richiedendo la continuità o la differenziabilità; in generale, tali prefasci sono anche fasci.

I concetti di morfismo di fasci e di sottofascio possono essere introdotti in modo ovvio. Ora si vuole introdurre il concetto di sezione di un fascio. Nei casi concreti, verranno trattati solo sottofasci di fasci di sezioni di un fibrato vettoriale; ma non è possibile introdurre il concetto di sezione partendo dalla sola definizione di fascio. Così, dato un fascio  $\mathcal{S}$ , si introdurrà un nuovo fascio  $\tilde{\mathcal{S}}$  fatto di sezioni di un certo tipo di fibrazione topologica, e che è isomorfo a  $\mathcal{S}$ .

Sia  $Y$  uno spazio topologico;  $Y$  è detto *spazio étalé* se esiste una mappa continua suriettiva  $\pi : Y \longrightarrow X$  che è un omeomorfismo locale. Ogni spazio étalé dà luogo al fascio delle sezioni continue. Sia  $x \in X$ ; l'insieme

$$\tilde{\mathcal{S}}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{S}_U$$

è detto *insieme dei germi delle sezioni* di  $\mathcal{S}$  in  $x$ .

Posto  $\tilde{\mathcal{S}} := \cup_{x \in X} \tilde{\mathcal{S}}_x$ , si ha una mappa naturale suriettiva  $\pi : \tilde{\mathcal{S}} \longrightarrow X$ . L'insieme  $\tilde{\mathcal{S}}$  può essere dotato della topologia meno fine che rende  $\pi$  continua. Pertanto,  $\pi$  è uno spazio étalé il cui fascio delle sezioni continue è naturalmente isomorfo a  $\mathcal{S}$  [Wel80].

**Osservazione A.3.1** Anche se  $\mathcal{S}$  è un prefascio è possibile definire il fascio  $\tilde{\mathcal{S}}$ , ma si ha solamente un morfismo di prefasci iniettivo fra  $\mathcal{S}$  e  $\tilde{\mathcal{S}}$ .  $\square$

**Osservazione A.3.2** Si noti che, quando  $\mathcal{S}$  è il fascio delle sezioni di una varietà fibrata  $\rho : Y \longrightarrow X$ , allora si può identificare  $\tilde{\mathcal{S}}$  con  $Y$  (una volta dotato  $Y$  della topologia meno fine che rende le sezioni continue), e  $\pi$  con  $\rho$ .  $\square$

**Definizione A.3.3** Un fascio  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}', \mathcal{S}'', r)$  è detto *fascio strutturato* se  $\mathcal{S}'$  è una categoria, la quale è detta *categoria strutturante*, e la mappa  $r$  è a valori nei morfismi di  $\mathcal{S}'$ .  $\square$

L'insieme dei fasci con una stessa categoria strutturante forma una categoria, in cui i morfismi sono i morfismi di fasci le cui mappe soggiacenti sono morfismi nella categoria strutturante.

Data una categoria  $\mathcal{S}'$ , per ogni aperto  $U \subset X$  c'è un funtore naturale dalla categoria dei fasci strutturati con categoria strutturante  $\mathcal{S}'$  alla categoria strutturante  $\mathcal{S}'$ , cche è dato da  $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_U$ . Il funtore indotto nel caso particolare  $U = X$  è detto funtore delle sezioni globali. Si noti che non tutte le categorie strutturanti sono conservate nel passaggio al limite diretto; se  $\mathcal{S}$  è un fascio strutturato, allora  $\tilde{\mathcal{S}}$  potrebbe non essere un fascio strutturato.

D'ora in poi, saranno considerati solamente fasci strutturati  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}', \mathcal{S}'', r)$  su  $X$  in cui  $\mathcal{S}'$  è la categoria dei gruppi abeliani. In tal caso, anche gli insiemi  $\tilde{\mathcal{S}}_x$ , con  $x \in X$ , hanno struttura di gruppi abeliani.

Sia  $G$  un gruppo abeliano,  $G' := G$ , e  $G'' : \tau \longrightarrow G'$  sia la mappa costante. Il fascio  $G := (G', G'', r)$  è detto *fascio costante*  $G$  su  $X$ . Dato un fascio  $\mathcal{S}$ , e un sottofascio  $\mathcal{T}$  di  $\mathcal{S}$ , è possibile definire un nuovo fascio  $\mathcal{S}/\mathcal{T}$  in modo ovvio. Tale fascio è detto *fascio quoziente* di  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$ .

Il seguente teorema fornisce un criterio su come decidere se un fascio è il fascio delle sezioni di un fibrato vettoriale.

**Teorema A.3.1** *Sia  $X$  una varietà (reale o complessa). Allora, c'è una corrispondenza biettiva tra classi di isomorfismi di fibrati vettoriali (reali o complessi) e classi di isomorfismo di fasci localmente liberi di modules (reali o complessi) sul fascio di anelli delle funzioni (reali o complesse) su  $X$ .*

**Definizione A.3.4** Sia  $X$  uno spazio paracompatto di Hausdorff, e  $\mathcal{S}$  sia un fascio su  $X$ . Allora

1.  $\mathcal{S}$  è detto *soffice* se, per ogni chiuso  $C \subset X$ , ogni sezione di  $\pi : \tilde{\mathcal{S}} \longrightarrow X$  definita su  $C$  può essere estesa ad una sezione globale;

2.  $\mathcal{S}$  è detto *fine* se per ogni ricoprimento aperto localmente finito  $\{U_i\}_{i \in I}$  di  $X$  esiste una famiglia di morfismi di fasci  $\{\eta_i\}_{i \in I}$  tale che

- $\sum_{i \in I} \eta_i = \text{id}_{\mathcal{S}}$ ,
- $\eta_i(\mathcal{S}_V) = 0$  per  $V$  un aperto in  $X \setminus U_i$ . □

**Corollario A.3.1** *I fasci fini sono soffici.*

**Osservazione A.3.3** I fasci costanti non nulli non sono fini né soffici. Infatti, le sezioni continue dei fasci costanti sono le sezioni costanti sulle componenti connesse di  $X$ , e la sezione  $s : a, b \longrightarrow G$  tale che  $s(a) \neq s(b)$  e  $a, b \in X$  giacciono nella stessa componente di  $X$  non può essere estesa ad una sezione continua. □

**Osservazione A.3.4** Nella precedente definizione è stato supposto  $X$  di Hausdorff e paracompatto. Questo non è necessario per la definizione, ma è necessario quando si prova la maggior parte dei risultati, come quello dell'osservazione precedente. Quindi, d'ora in poi  $X$  denoterà uno spazio paracompatto e di Hausdorff. □

### A.3.b Risoluzioni

**Definizione A.3.5** Siano  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  tre fasci. Allora una successione di morfismi

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$$

è detta *esatta* se la successione di morfismi di gruppi abeliani

$$\tilde{\mathcal{A}}_x \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}_x \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}_x$$

è esatta per ogni  $x \in X$ . □

In generale, se una successione di fasci  $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$  è esatta, allora la successione di gruppi abeliani  $\mathcal{A}_X \longrightarrow \mathcal{B}_X \longrightarrow \mathcal{C}_X$  indotta dal funtore delle sezioni globali non è esatta. Tuttavia, vale il seguente risultato.

**Teorema A.3.2** *Se la successione esatta corta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

*è esatta e  $\mathcal{A}$  è sofficie, allora la successione corta indotta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_X \longrightarrow \mathcal{B}_X \longrightarrow \mathcal{C}_X \longrightarrow 0$$

*è esatta.*

**Corollario A.3.2** *Se la successione esatta corta di fasci*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

*è esatta e  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  sono soffici, allora  $\mathcal{C}$  è soffice.*

**Corollario A.3.3** *Sia  $0 \longrightarrow \mathcal{S}^0 \longrightarrow \mathcal{S}^1 \longrightarrow \dots$  una successione esatta di fasci soffici. Allora la successione indotta  $0 \longrightarrow \mathcal{S}_X^0 \longrightarrow \mathcal{S}_X^1 \longrightarrow \dots$  è esatta.*

Una famiglia numerabile di fasci  $\mathcal{F}^* := \{\mathcal{F}^i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è detta fascio gradato. Una *risoluzione* di un fascio  $\mathcal{S}$  è una successione esatta di fasci della forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F}^n \longrightarrow \dots$$

denotata anche da  $0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{F}^*$ . Un *morfismo* fra le risoluzioni  $0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{F}^*$  e  $0 \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{G}^*$  è un morfismo  $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$  e un insieme di morfismi  $\mathcal{F}^i \longrightarrow \mathcal{G}^i$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$  tali che il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{F}^* \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{G}^* \end{array}$$

**Teorema A.3.3** *Sia  $\mathcal{S}$  un fascio. Allora, esiste un fascio naturale gradato  $\mathcal{C}^*(\mathcal{S})$  e una risoluzione naturale  $0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{S})$  associati a  $\mathcal{S}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni aperto  $U \subset X$ , si pone

$$\mathcal{C}^0(\mathcal{S})_U := \{f : U \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}} \mid f \text{ sezione di } \pi\}.$$

Ciò induce un fascio  $\mathcal{C}^0(\mathcal{S})$  che è detto *fascio delle sezioni discontinue* di  $\mathcal{S}$ . Si ponga, per induzione,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^0(\mathcal{S}) &:= \mathcal{S}, & \mathcal{F}^1(\mathcal{S}) &:= \mathcal{C}^0(\mathcal{S})/\mathcal{S}, & \mathcal{C}^1(\mathcal{S}) &:= \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{S})), \\ \mathcal{F}^i(\mathcal{S}) &:= \mathcal{C}^{i-1}(\mathcal{S})/\mathcal{F}^{i-1}(\mathcal{S}). \end{aligned}$$

Si hanno le successioni esatte corte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^i(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^i(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{F}^{i+1}(\mathcal{S}) \longrightarrow 0$$

che inducono la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{S}) \longrightarrow \dots$$

Si può provare facilmente che  $\mathcal{C}^i(\mathcal{S})$  è un fascio soffice per ogni  $i \in \mathbb{N}$ .  $\square$

### A.3.c Teorie coomologiche: una breve introduzione

La risoluzione naturale associata ad un fascio  $\mathcal{S}$  induce una successione di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_X \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S})_X \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{S})_X \longrightarrow \dots$$

in cui la composizione di due mappe consecutive è la mappa nulla. Tuttavia, in generale questa successione non è esatta. Si rammenti che una tale successione è detta *complesso di cocatene*. Si pone

$$H^q(X, \mathcal{S}) := \frac{\ker(\mathcal{C}^q(\mathcal{S})_X \longrightarrow \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{S})_X)}{\operatorname{im}(\mathcal{C}^{q-1}(\mathcal{S})_X \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{S})_X)}$$

per ogni  $q \in \mathbb{N}$ , con  $\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{S})_X := 0$ .

**Definizione A.3.6** Il gruppo abeliano  $H^q(X, \mathcal{S})$  è detto gruppo di coomologia di  $X$  di grado  $q$  con coefficienti in  $\mathcal{S}$ .  $\square$

Si ponga  $H^*(X, \mathcal{S}) := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H^i(X, \mathcal{S})$ . Il gruppo abeliano  $H^*(X, \mathcal{S})$  è detto *coomologia di  $X$  a valori in  $\mathcal{S}$* .

È chiaro che  $H^0(X, \mathcal{S}) = \mathcal{S}_X$ . Il fascio  $\mathcal{S}$  è detto *aciclico* se  $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$  per  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q > 0$ . Se  $\mathcal{S}$  è soffice, allora  $\mathcal{S}$  è aciclico (corollario A.3.3).

La coomologia soddisfa tre proprietà fondamentali.

**Teorema A.3.4** *Sia  $X$  uno spazio paracompatto di Hausdorff. Allora*

1. *per ogni fascio di gruppi abeliani  $\mathcal{S}$  su  $X$  si ha  $H^0(X, \mathcal{S}) = \mathcal{S}_X$  e, se  $\mathcal{S}$  è soffice, allora  $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$  per  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q > 0$ ;*
2. *per ogni  $q \in \mathbb{N}$ ,  $H^q$  è un funtore covariante dalla categoria dei fasci alla categoria dei gruppi abeliani, e  $H^0$  coincide col funtore delle sezioni globali;*
3. *per ogni successione esatta corta di fasci*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

*esiste un morfismo di gruppi*

$$\delta^q : H^q(X, \mathcal{C}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{A})$$

*per ogni  $q \in \mathbb{N}$ , che è detto operatore di Bockstein, che soddisfa le seguenti proprietà:*

- *la successione indotta*

$$\dots \xrightarrow{\delta^{q-1}} H^q(X, \mathcal{A}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{B}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X, \mathcal{A}) \longrightarrow \dots$$

*è esatta;*

- un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{C} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B}' & \longrightarrow & \mathcal{C}' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

induce un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\delta^{q-1}} & H^q(X, \mathcal{A}) & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{B}) & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X, \mathcal{A}) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\delta^{q-1}} & H^q(X, \mathcal{A}') & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{B}') & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{C}') \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X, \mathcal{A}') \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Tali proprietà potrebbero essere prese come assiomi per una teoria coomologica di uno spazio paracompatto di Hausdorff  $X$  con coefficienti in un fascio  $\mathcal{S}$ . Esiste una teoria coomologica: si è visto come essa nasca in modo naturale. Si può provare che tale teoria è unica [GuRo65].

Il seguente teorema può essere usato per calcolare la coomologia in casi concreti. Si noti che una risoluzione  $O \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{F}^*$  induce un complesso di cocatene  $O \longrightarrow \mathcal{S}_X \longrightarrow \mathcal{F}_X^*$  per mezzo del funtore delle sezioni globali. Quindi, si possono definire i *gruppi derivati*

$$H^q(\mathcal{F}_X^*) := \frac{\ker(\mathcal{F}_X^q \longrightarrow \mathcal{F}_X^{q+1})}{\operatorname{im}(\mathcal{F}_X^{q-1} \longrightarrow \mathcal{F}_X^q)}$$

per ogni  $q \in \mathbb{N}$ , con  $\mathcal{F}_X^{-1} := \mathcal{S}_X$ .

**Teorema A.3.5** (*Teorema di de Rham astratto*). Sia  $O \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{F}^*$  una risoluzione di  $\mathcal{S}$ . Allora, esiste un morfismo naturale

$$H^q(\mathcal{F}_X^*) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{S}) .$$

Se i fasci di  $\mathcal{F}^*$  sono aciclici, allora il precedente morfismo è un isomorfismo.

Il teorema precedente permette di calcolare la coomologia di una varietà  $M$  a coefficienti nel fascio costante  $\mathbb{R}$ . Infatti, si ha la risoluzione di de Rham  $0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \overset{*}{\Lambda}$ , in cui ogni fascio di  $\overset{*}{\Lambda}$  è fine (vedere le prossime sottosezioni). Quindi, la coomologia di  $\mathbb{R}$  è isomorfa alla coomologia di de Rham di  $M$ .

Inoltre, è molto facile vedere che un morfismo di risoluzioni

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{F}^* \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{G}^* \end{array}$$

in cui la mappa  $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$  è un isomorfismo dà un isomorfismo naturale

$$H^q(\mathcal{F}_X^*) \longrightarrow H^q(\mathcal{G}_X^*) .$$

Quindi, si possono ottenere facilmente isomorfismi naturali fra la coomologia di de Rham, la coomologia singolare e la coomologia simpliciale.

### A.3.d Coomologia di Čech

Come sopra,  $X$  denota uno spazio paracompatto di Hausdorff, e  $\mathcal{S}$  un fascio di gruppi abeliani su  $X$ .

Sia  $\mathfrak{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ , con  $I$  un insieme, un ricoprimento aperto di  $X$ . Si definisce

1. un  $q$ -*simpleso* come un insieme ordinato  $(U_{i_0}, \dots, U_{i_q})$  di  $q+1$  insiemi di  $\mathfrak{U}$  tali che  $\cap_{0 \leq j \leq q} U_{i_j} \neq \emptyset$ ; si denota con  $C_q(\mathfrak{U})$  l'insieme dei  $q$ -simplessi;
2. il *supporto* di un  $q$ -simpleso  $\sigma := (U_{i_0}, \dots, U_{i_q})$  come l'aperto  $|\sigma| := \cap_{0 \leq j \leq q} U_{i_j}$ ;
3. una  $q$ -*cocatena* a coefficienti in  $\mathcal{S}$  come una mappa

$$f : C_q(\mathfrak{U}) \longrightarrow \mathcal{S} : \sigma \longmapsto f(\sigma) \in \mathcal{S}_{|\sigma|} ;$$

si denota con  $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$  l'insieme delle  $q$ -cocatene a coefficienti in  $\mathcal{S}$ ;

4. l'*operatore di cobordo*  $d : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$  come la seguente mappa: per  $\sigma = (U_{i_0}, \dots, U_{i_{q+1}})$  e  $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$ , si ponga

$$\sigma_j := (U_{i_0}, \dots, U_{i_{j-1}}, U_{i_{j+1}}, \dots, U_{i_{q+1}}) , \quad 0 \leq j \leq q+1 ,$$

e

$$df(\sigma) := \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j r_{|\sigma|}^{\sigma_j} f(\sigma_j)$$

( $r$  è la mappa restrizione di  $\mathcal{S}$ ).

Per ogni  $q \in \mathbb{N}$  l'insieme  $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$  può essere dotato di una struttura di gruppo abeliano in modo naturale. È piuttosto semplice verificare che  $d$  è un morfismo di gruppi, e che  $d^2 = 0$ . Quindi si ha il complesso di cocatene

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow \dots$$

**Definizione A.3.7** I gruppi derivati  $H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$  del precedente complesso di cocatene sono detti *coomologia di Čech* del ricoprimento  $\mathfrak{U}$  a coefficienti in  $\mathcal{S}$ .  $\square$

La precedente coomologia è un oggetto puramente combinatorio, e dipende dalla scelta di un ricoprimento  $\mathfrak{U}$ . Il prossimo passo è definire una teoria coomologica che dipenda solamente da  $X$ .

Siano  $\mathfrak{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ ,  $\mathfrak{V} := \{V_j\}_{j \in J}$  (con  $I, J$  due insiemi) due ricoprimenti di  $X$ . Allora, si dice che  $\mathfrak{V}$  è un *raffinamento* di  $\mathfrak{U}$  se esiste una mappa  $f : J \longrightarrow I$  tale che  $V_j \subset U_{f(j)}$ . Per ogni  $q \in \mathbb{N}$  questa mappa induce una mappa

$$\tilde{f} : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow C^q(\mathfrak{V}, \mathcal{S})$$

che si dimostra essere un morfismo di complessi di cocatene, cioè  $\tilde{f}$  commuta con  $d$ . Inoltre, per ogni coppia di mappe di raffinamento  $f, g : J \longrightarrow I$  esiste una mappa  $K : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow C^{q-1}(\mathfrak{V}, \mathcal{S})$  per ogni  $q \in \mathbb{N}$  tale che

$$\tilde{f} - \tilde{g} = dK + Kd .$$

Ciò prova la seguente proposizione.

**Proposizione A.3.1** Siano  $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$  due ricoprimenti di  $X$  tali che  $\mathfrak{V}$  sia un raffinamento di  $\mathfrak{U}$ . Allora, esiste un morfismo di gruppi

$$H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^*(\mathfrak{V}, \mathcal{S}) .$$

**Definizione A.3.8** Il limite diretto

$$H^*(X, \mathcal{S}) := \lim_{\mathfrak{U}} H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$$

è detto *coomologia di Čech* di  $X$  a coefficienti in  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**Osservazione A.3.5** Il precedente limite diretto è il quoziente dello spazio  $\times_{\mathfrak{U}} H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$  per mezzo della seguente relazione di equivalenza: due elementi  $a \in H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{S})$  e  $b \in H^*(\mathfrak{V}, \mathcal{S})$  sono equivalenti se esiste un raffinamento  $\mathfrak{W}$  di  $\mathfrak{U}$  e  $\mathfrak{V}$  tale che, sotto l'azione del morfismo della precedente proposizione, essi inducono lo stesso elemento in  $H^*(\mathfrak{W}, \mathcal{S})$ .  $\square$

**Osservazione A.3.6** Si può provare che la coomologia di Čech  $H^*(X, \mathcal{S})$  soddisfa le proprietà del teorema A.3.4, e quindi è isomorfa alla coomologia naturale di  $X$  a coefficienti in  $\mathcal{S}$ . Questa è la ragione per cui è stato usato lo stesso simbolo per entrambe. Tuttavia, è importante notare che la coomologia di Čech, a differenza della coomologia naturale, non nasce come coomologia di un complesso di cocatene.  $\square$

La parte finale della sottosezione è dedicata ad alcuni risultati fondamentali ai fini del calcolo della coomologia di Čech di spazi concreti, come, ad esempio, le varietà differenziabili. Il seguente teorema è di fondamentale importanza per il calcolo di coomologie di spazi concreti, come le varietà differenziabili. La sua dimostrazione si può trovare in [GuRo65]. È possibile arrivare anche a conseguenze analoghe mediante la teoria delle successioni spettrali [BoTu82], ma ciò non sarà necessario per questo lavoro.

**Teorema A.3.6** (*Teorema di Leray*). *Sia  $\mathfrak{U}$  un ricoprimento di  $X$  tale che*

$$H^q(|\sigma|, \mathcal{S}|_{|\sigma|}) = 0$$

*per ogni  $\sigma \in C_q(\mathfrak{U})$  e per ogni  $q \in \mathbb{N}$ . Allora, per ogni  $q \in \mathbb{N}$  esiste un isomorfismo*

$$H^q(X, \mathcal{S}) \simeq H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) .$$

Una interessante conseguenza di questo risultato è la seguente. Se  $\mathfrak{U}$  e  $\mathfrak{V}$  sono due ricoprimenti di  $X$  con le proprietà del precedente teorema, e  $\mathfrak{V}$  è un raffinamento di  $\mathfrak{U}$ , allora il morfismo di gruppi

$$H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{S}) \longrightarrow H^*(\mathfrak{V}, \mathcal{S}) .$$

indotto dal raffinamento è un isomorfismo.

L'importanza del teorema di Leray emerge chiaramente dalla prossima proposizione.

**Proposizione A.3.2** *Sia  $X$  una varietà, e sia  $\mathfrak{U} := \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento di  $X$ . Allora, esiste un raffinamento  $\mathfrak{V} := \{V_j\}_{j \in J}$  tale che ogni intersezione di un numero finito di aperti del raffinamento è diffeomorfa a  $\mathbb{R}^m$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, esiste un raffinamento  $\mathfrak{V} := \{V_j\}_{j \in J}$  formato da *aperti fortemente convessi* rispetto alla connessione di Levi–Civita di una metrica riemanniana; tali insiemi sono diffeomorfi a  $\mathbb{R}^m$  [KoNo63].  $\square$

Si noti che il raffinamento della precedente proposizione può non essere formato da un numero finito di aperti, anche se ogni ricoprimento di una varietà ammette un raffinamento che costituisce un atlante finito della varietà stessa [GHV72].

I ricoprimenti della precedente proposizione sono detti *ricoprimenti buoni*.

## A.4 Coomologia di de Rham

In questa sezione,  $M$  denota una varietà di dimensione  $m$ , e  $\Lambda^k$  denota il fascio delle  $k$ -forme su  $M$ .

Si ha la seguente risoluzione del fascio costante  $\mathbb{R}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^m \xrightarrow{d} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots,$$

in cui i fasci  $\Lambda^k$  sono fini (sono i fasci delle sezioni di fibrati vettoriali). Il funtore delle sezioni globali induce il complesso di cocatene

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_M \longrightarrow \Lambda_M^*.$$

**Definizione A.4.1** I gruppi derivati  $H_{\text{dR}}^*(M)$  del precedente complesso di cocatene si dicono *coomologia di de Rham* della varietà  $M$ .  $\square$

**Osservazione A.4.1** In questo caso, i gruppi derivati  $H_{\text{dR}}^*(M)$  possono essere dotati di una struttura di spazi vettoriali, poiché  $\Lambda^k$  sono fasci di spazi vettoriali.  $\square$

**Osservazione A.4.2** Per il teorema astratto di de Rham, si ha un isomorfismo naturale

$$H_{\text{dR}}^q(M) \simeq H^q(M, \mathbb{R})$$

per ogni  $q \in \mathbb{N}$ . Ma spesso è più semplice studiare le proprietà di  $H_{\text{dR}}^q(M)$  piuttosto che le proprietà di  $H^q(M, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Corollario A.4.1** Sia  $\mathfrak{U}$  un ricoprimento buono di  $M$ . Allora, per ogni  $q \in \mathbb{N}$  si ha l'isomorfismo

$$H_{\text{dR}}^q(M) \simeq H^q(M, \mathbb{R}) H^q(\mathfrak{U}, \mathbb{R}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Infatti, se  $U$  è un aperto di  $\mathfrak{U}$ , allora si ha

$$H^q(U, \mathbb{R}) \simeq H_{\text{dR}}^q(U) \simeq \{0\}$$

ove il primo isomorfismo è dovuto al teorema astratto di de Rham, e il secondo isomorfismo si deve al lemma di Poincaré. Pertanto, il ricoprimento  $\mathfrak{U}$  soddisfa le ipotesi del teorema di Leray.  $\square$

Ora, si studiano alcune proprietà fondamentali della coomologia di de Rham.

**Proposizione A.4.1** Se  $M$  ammette un ricoprimento buono formato da un numero finito di aperti, allora la coomologia  $H_{\text{dR}}^*(M)$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita.

**DIMOSTRAZIONE.** Viene dal lemma di Poincaré, dalla successione di Mayer–Vietoris, che fornisce informazioni sulla coomologia dell’unione di due aperti in  $M$ , e dal precedente corollario.

$\square$

Si rammenti che, se  $N$  è una varietà, allora una mappa  $f : M \longrightarrow N$  induce un morfismo di risoluzioni  $f^*$  da  $0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \overset{k}{\Lambda}(N)$  a  $0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \overset{k}{\Lambda}(M)$ , e una mappa  $f^* : H_{dR}^*(N) \longrightarrow H_{dR}^*(M)$ .

Due mappe  $f, g : M \longrightarrow N$  sono dette  $\mathcal{C}^\infty$ -omotope se esiste una mappa  $\mathcal{C}^\infty H : M \times [0, 1] \longrightarrow N$  tale che  $H|M \times \{0\} = f$  e  $H|M \times \{1\} = g$ . Due mappe  $f : M \longrightarrow N$  e  $h : N \longrightarrow M$  sono dette  $\mathcal{C}^\infty$ -omotopicamente equivalenti se  $g \circ f$  e  $f \circ g$  sono  $\mathcal{C}^\infty$ -omotope alle mappe identità. È piuttosto semplice dimostrare la seguente proposizione.

**Proposizione A.4.2** *Se due mappe sono  $\mathcal{C}^\infty$ -omotope, allora esse inducono la stessa mappa fra le coomologie.*

Come conseguenza, se  $f : M \longrightarrow N$  è un retratto di deformazione, allora le coomologie di de Rham di  $M$  and  $N$  sono le stesse, poiché  $f$  è  $\mathcal{C}^\infty$ -omotopicamente equivalente all’inclusione. Quindi, lo spazio totale di un fibrato affine ha la stessa coomologia dello spazio base.

**Teorema A.4.1** (*Formula di Künneth*). *Se  $M, N$  sono varietà, e  $N$  ha coomologia di dimensione finita, allora*

$$H_{dR}^q(M \times N) = \bigoplus_{i+j=q} H^i(M)_{dR} \otimes H_{dR}^j(N) ,$$

per  $q \in \mathbb{N}$ .

**Osservazione A.4.3** La formula di Künneth permette di stabilire un risultato importante sulla coomologia di un fibrato, il teorema di Leray–Hirsch [BoTu82].

$\square$

## A.5 Isomorfismo coomologia di de Rham – coomologia di Čech

In questa sezione verrà costruito un isomorfismo tra la coomologia di de Rham di grado 2 e la coomologia di Čech di grado 2. Questo isomorfismo sarà usato per dimostrare i risultati di esistenza di strutture quantistiche galileiane e einsteiniane.

Prima di tutto, si noti che il corollario A.4.1 permette di semplificare considerevolmente il problema, riducendolo alla determinazione di un isomorfismo

$$H_{de\ Rham}^*(M) \longrightarrow H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}) ,$$

ove  $\mathfrak{U}$  è un ricoprimento buono di  $\mathbf{M}$  localmente finito. Pertanto, si fissi un ricoprimento buono  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  localmente finito di  $\mathbf{M}$ .

Sia  $[\Omega] \in H_{\text{de Rham}}^*(\mathbf{M})$ , e si scelga un potenziale di  $\tau_i$  di  $\Omega$  su ogni aperto  $U_i$ . Per ogni  $i, j \in I$  tali che  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , la forma  $\tau_i - \tau_j$  è una forma chiusa su  $U_i \cap U_j$ . Concordemente, per ogni  $i, j \in I$  tali che  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , si scelga una funzione  $f_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\tau_i - \tau_j = df_{ij} .$$

Per ogni  $i, j, k \in I$  tali che  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$  è evidente che  $d(f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}) = 0$ , e quindi si pone

$$c_{ijk} := f_{ij} + f_{jk} - f_{ik} \in \mathbb{R} ,$$

in virtù delle proprietà del ricoprimento.

Pertanto, si può definire una 2-cocatena

$$c : C_2(\mathfrak{U}) \longrightarrow \mathbb{R} : (U_i, U_j, U_k) \longmapsto c_{ijk} ,$$

che risulta chiusa, ossia, per ogni 3-catena  $(U_i, U_j, U_k, U_h) \in C_3(\mathfrak{U})$

$$dc(U_i, U_j, U_k, U_h) = c_{jkh} - c_{ikh} + c_{ijh} - c_{ijk} = 0 ,$$

ove  $d$  denota l'operatore di cobordo.

Quindi, resta definito un elemento  $[c] \in H(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ . Bisogna provare che tale elemento non dipende dalle scelte fatte, ovvero il rappresentante  $\Omega$  di  $[\Omega] \in H_{\text{de Rham}}^2(\mathbf{M})$ , le forme  $\tau_i$  e le funzioni  $f_{ij}$ .

L'elemento  $c \in C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$  non dipende dal rappresentante scelto per  $[\Omega]$ , poichè se  $\Omega + d\tau$  è un altro rappresentante, si ha  $\tau_i + \tau - \tau_j - \tau = \tau_i - \tau_j$ .

La scelta di un'altra famiglia  $\{\tau'_i = \tau_i + \alpha_i\}_{i \in I}$  di potenziali di  $\Omega$  definisce una stessa classe  $[c] \in H(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ . Infatti, le forme  $\alpha_i$  sono chiuse, pertanto la cocatena  $c' \in C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$  definita tramite le forme  $\{\tau'_i\}_{i \in I}$  è della forma  $c' = c + db$ , ove  $b \in C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ .

Inoltre, la scelta di differenti funzioni  $f'_{ij} = f_{ij} + g_{ij}$ , per ogni  $i, j \in I$  tali che  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  e che  $df'_{ij} = \tau_i - \tau_j$ , implica che le funzioni  $g_{ij}$  sono costanti, e quindi le funzioni  $f'_{ij}$  definiscono, secondo il precedente procedimento, una cocatena  $c' \in C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$  della forma  $c' = c + db$ , ove  $b \in C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ .

Pertanto, resta definito un morfismo di spazi vettoriali

$$I^2 : H_{\text{de Rham}}^2(\mathbf{M}) \longrightarrow H^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) : [\Omega] \longmapsto [c] .$$

Bisogna provare, ora, che tale morfismo è un isomorfismo. A tal fine, sarà sufficiente esibire un morfismo  $\tilde{I}^2 : H^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{\text{de Rham}}^2(\mathbf{M})$  che sia inverso del precedente. Sia  $[c] \in H^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ ; si può considerare  $c$  come una cocatena chiusa in  $C^2(\mathfrak{U}, C^\infty(\mathbf{M}))$ . Poiché  $C^\infty(\mathbf{M})$  è un fascio fine, esiste  $f \in C^1(\mathfrak{U}, C^\infty(\mathbf{M}))$  tale che  $df = c$ , ove  $d$  è il differenziale.

Infatti, si può esibire una tale  $f$  scegliendo una partizione dell'unità  $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$  e ponendo

$$f_{jk} := \sum_{i \in I} \varphi_i c_{ijk} .$$

Il differenziale esterno  $d$  è ben definito sulle cocatene  $C^q(\mathfrak{U}, \overset{*}{\Lambda})$  e commuta con l'operatore di cobordo  $d$  per ovvi motivi. Ne segue

$$ddf = dd f = dc = 0 ,$$

poichè le funzioni locali date da  $c$  sono costanti. Essendo  $df \in C^1(\mathfrak{U}, \overset{1}{\Lambda})$  ed essendo  $\overset{*}{\Lambda}$  fine, si deduce l'esistenza di  $\tau \in C^0(\mathfrak{U}, \overset{1}{\Lambda})$  tale che  $d\tau = df$ , e in particolare si può scegliere

$$\tau_j := \sum_{i \in I} \varphi_i df_{ij} .$$

Si ponga ora  $\Omega := d\tau$ . Risulta  $d\Omega = 0$ , e risulta anche che  $\Omega$  è una forma definita globalmente su  $\mathbf{M}$ , poichè, se  $i, j \in I$  tali che  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , allora si ha  $\Omega_i = d\tau_i$  e  $\Omega_j = d\tau_j$  per definizione di  $\Omega$ , e quindi

$$\Omega_i - \Omega_j = d(\tau_i - \tau_j) = d(d\tau)_{ij} = ddf_{ij} = 0 .$$

Quindi, resta definito un elemento  $[\Omega] \in H_{\text{de Rham}}(\mathbf{M})$ . Bisogna provare che tale elemento non dipende dalle scelte fatte, ovvero il rappresentante  $c$  di  $[c] \in H^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ , le funzioni  $f_{ij}$  e le forme  $\tau_i$ .

Scegliendo un altro rappresentante di  $[c]$ ,  $c' = c + db \in C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$  si ha

$$f'_{jk} := \sum_{i \in I} \varphi_i c'_{ijk} = \sum_{i \in I} \varphi_i c_{ijk} + \sum_{i \in I} \varphi_i b'_{ijk} .$$

Inoltre, scegliendo un diverso potenziale  $f' = f + dg \in C^1(\mathfrak{U}, C^\infty(\mathbf{M}))$ , ove  $g \in C^0(\mathfrak{U}, C^\infty(\mathbf{M}))$ , si definisce

$$\tau'_j := \sum_{i \in I} \varphi_i df'_{ij} ;$$

ma  $\Omega = d\tau = d\tau'$ .

Infine, scegliendo un diverso potenziale  $\tau' = \tau + \sigma$ , ove  $\sigma \in C^0(\mathfrak{U}, \overset{1}{\Lambda})$ , si ha  $d\sigma = 0$ , ossia  $\sigma$  è una 1-forma globalmente definita. Quindi  $\Omega' = d\tau' = \Omega + d\sigma$ , pertanto  $[\Omega] = [\Omega']$ .

È stato definito, quindi, un morfismo di spazi vettoriali

$$\tilde{I}^2 : H^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{\text{de Rham}}^2(\mathbf{M}) : [c] \longmapsto [\Omega] .$$

È da provare che  $\tilde{I}^2$  è l'inverso di  $I^2$ . Ma ciò è banale, e pertanto l'obbiettivo della sottosezione è stato raggiunto.

## A.6 Spazi di getti

In questa sezione sono date le nozioni fondamentali sugli spazi di getti. Le sorgenti principali per i getti di varietà fibrate sono [MaMo83a] e [Sau89]. Per quanto riguarda i getti di varietà di Lorentz, si veda [JaMo95] e [MoVi94].

Partendo da una varietà  $\mathbf{X}$ , si può definire per mezzo della sola struttura differenziabile di  $\mathbf{X}$  un'insieme di varietà fibrate, gli spazi di getti. Tali spazi vengono definiti in modo naturale considerando certe classi di applicazioni differenziabili sulla varietà  $\mathbf{X}$ . In particolare, gli spazi di getti possono essere introdotti in due modi:

1. considerando le sezioni delle varietà fibrate su  $\mathbf{X}$ ;
2. considerando le sottovarietà di dimensione fissata  $k$  in  $\mathbf{X}$ , e le mappe che queste inducono localmente su  $\mathbb{R}^k$  [War71].

Come si vedrà, ogni definizione permette di recuperare l'altra. Inoltre, entrambe queste definizioni permettono di introdurre come caso particolare lo spazio tangente di ordine  $k$   $T_k\mathbf{X}$ . Il vantaggio dell'utilizzo degli spazi di getti rispetto agli spazi tangenti è evidente nelle formulazioni della meccanica relativistica galileiana ed einsteiniana di questo lavoro.

### A.6.a Spazi di getti di una varietà fibrata

Ci si limiterà ad esporre il caso in cui  $\pi : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$  è una varietà fibrata, con  $\dim \mathbf{X} = 1$  e  $\dim \mathbf{Y} = m + 1$ , poiché il caso generale di una varietà fibrata con base di dimensione qualunque sarà impiegato marginalmente in questo lavoro, e può comunque essere sviluppato facilmente per analogia con il caso presente.

Un sistema di coordinate su  $\mathbf{Y}$  adattato alla fibrazione sarà denotato da  $(x^0, y^i)$ ; gli indici latini  $i, j, \dots$  saranno compresi tra 1 e  $m$  e indicheranno coordinate sulla fibra, e l'indice 0 indicherà una coordinata su  $\mathbf{X}$ . Si denoterà con  $(\partial_0, \partial_i)$  e  $(d^0, d^i)$ , rispettivamente, le basi locali per i campi vettoriali e le 1-forme su  $\mathbf{Y}$  indotte da una carta adattata.

Saranno denotate con  $(\partial_\lambda)$  e  $(d^\lambda)$  le basi locali dei campi vettoriali e delle 1-forme su  $\mathbf{E}$  indotte da una carta adattata. Inoltre,  $\partial_\lambda$  denoterà la base locale delle sezioni del fibrato vettoriale  $VTE \longrightarrow TE$ , e  $d^\lambda$  denoterà la sua base duale.

L'accento ( $\checkmark$ ) denoterà restrizioni verticali. Di conseguenza,  $(\check{d}^i)$  denoterà la base locale delle sezioni di  $V^*\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ .

Si denotano i multi-indici di dimensione  $n$  mediante lettere latine sottolineate come  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ ; identificando l'indice  $i$  con il multi-indice  $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) \equiv (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , si può scrivere  $\underline{p} + i = (p_1, \dots, p_i + 1, \dots, p_n)$ . Il caso che verrà preso in considerazione è il caso  $n = 1$ , quindi si ha  $\underline{p} \in \mathbb{N}$ ,  $|\underline{p}| = p$ ,  $\underline{p} + 1 = (\underline{p} + 1)$ ; tuttavia è comodo mantenere la notazione di multi-indice come modo per distinguere gli indici dai multi-indici. Se  $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ , si pone  $\partial_{\underline{p}}f := \partial_0 \dots \partial_0 f$ , ove la derivazione  $\partial_0$  è ripetuta  $\underline{p}$  volte. Si noti che, se  $\underline{p} = 0$ , allora  $\partial_{\underline{p}}f = f$ .

**Definizione A.6.1** Siano  $s, s' : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  due sezioni (locali) di  $\mathbf{Y}$  definite in un intorno di  $x \in \mathbf{X}$ . Si dice che  $s$  è  $r$ -equivalente a  $s'$  in  $x$  rispetto ad una carta adattata  $(x^0, y^i)$  se

$$\partial_{\underline{p}} s^i|_x = \partial_{\underline{p}} s'^i|_x, \quad 0 \leq \underline{p} \leq r. \quad \square$$

Si dimostra (per induzione su  $r$ ) che la precedente relazione non dipende dalla carta scelta, e che pertanto induce una relazione d'equivalenza nell'insieme delle sezioni locali definite intorno ad  $x$ . Posto  $J_{rx}\mathbf{Y}$  l'insieme quoziente di tale relazione d'equivalenza, si definisce *spazio dei getti di ordine  $r$  della fibrazione  $\pi : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$*  l'insieme

$$J_r\mathbf{Y} := \bigsqcup_{x \in \mathbf{X}} J_{rx}\mathbf{Y}$$

(si noti che  $J_0\mathbf{Y} = \mathbf{Y}$ ).

L'insieme  $J_r\mathbf{Y}$  ha una struttura naturale di varietà differenziabile data dalle carte  $(x^0, y_{\underline{p}}^i)$ , ove

$$y_{\underline{p}}^i : J_r\mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R} : [s]_x \longmapsto \partial_{\underline{p}} s$$

per  $0 \leq \underline{p} \leq r$ ; in particolare, si ha  $y_0^i = y^i$ . Per  $r = 1, 2, 3$ , gli indici saranno scritti esplicitamente, secondo la regola  $y_{\underline{0}}^i = y^i$ ,  $y_{\underline{1}}^i = y_0^i$ ,  $y_{\underline{2}}^i = y_{00}^i$ ,  $y_{\underline{3}}^i = y_{000}^i$ .

Sia  $0 \leq s \leq r$ ; si hanno le proiezioni naturali

$$\pi_s^r : J_r\mathbf{Y} \longrightarrow J_s\mathbf{Y}, \quad \pi^r : J_r\mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X},$$

che rendono  $\pi_s^r : J_r\mathbf{Y} \longrightarrow J_s\mathbf{Y}$  un fibrato e  $\pi^r : J_r\mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$  uno spazio fibrato. Se  $\pi : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$  è un fibrato, allora  $\pi^r : J_r\mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$  è un fibrato.

**Osservazione A.6.1** La definizione di spazio di getti di ordine  $r$  di una fibrazione permette di recuperare la definizione di spazio tangente ad una varietà. Infatti, si dimostra facilmente che lo spazio dei getti di ordine  $r$  di ogni fibrazione banale del tipo di  $\text{pro}_1 : \mathbf{M} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{M}$ , ove  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  sono due varietà, è naturalmente isomorfo ad un fibrato prodotto:  $J_1(\mathbf{M} \times \mathbf{N}) \simeq \mathbf{M} \times \mathbf{J}$ . Pertanto, data una varietà  $\mathbf{M}$ , considerando il fibrato banale  $\text{pro}_1 : \mathbb{R} \times \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ , si può definire lo spazio tangente  $T_r\mathbf{M}$  di ordine  $r$  ad  $\mathbf{M}$  come la fibra del fibrato banale  $(\text{pro}_1)^r : \mathbb{R} \times T_k\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Si può vedere che tale definizione coincide con quella standard [War71].

Si osservi che la definizione di getto di una fibrazione è data sfruttando solamente la struttura differenziabile delle varietà. Anche lo spazio tangente ad una varietà può essere definito mediante la sola struttura differenziabile, e si può vedere che ciascuna delle due definizioni permette di recuperare l'altra.  $\square$

Se  $0 \leq t \leq s \leq r$ , allora il pull-back di fibrati fornisce le inclusioni naturali

$$J_r\mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} T^*\mathbf{X} \subset J_r\mathbf{Y} \times_{J_t\mathbf{Y}} T^*J_t\mathbf{Y} \subset J_r\mathbf{Y} \times_{J_s\mathbf{Y}} T^*J_s\mathbf{Y} \subset T^*J_r\mathbf{Y}.$$

Se  $s : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  è una sezione, allora  $s$  può essere prolungata in modo naturale alla sezione  $j_r s : \mathbf{X} \longrightarrow J_r \mathbf{Y}$ , caratterizzata dall'espressione in coordinate  $y_p^i \circ j_r s = \partial_{\underline{p}} s^i$  per  $0 \leq \underline{p} \leq r$ .

Sia  $f : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$  un morfismo di  $\mathbf{Y}$  al di sopra di  $\mathbf{X}$ . Allora esiste un unico morfismo fibrato  $J_r f : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow J_r \mathbf{Z}$  su  $f$  tale che il seguente diagramma commuti per ogni sezione  $s$  di  $\mathbf{Y}$

$$\begin{array}{ccc} J_r \mathbf{Y} & \xrightarrow{J_r f} & J_r \mathbf{Z} \\ & \swarrow j_r s & \nearrow j_r(f \circ s) \\ & \mathbf{X} & \end{array}$$

È facile provare che il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} J_r \mathbf{Y} & \xrightarrow{J_r f} & J_r \mathbf{Z} \\ \pi_s^r \downarrow & & \downarrow \pi_s^r \\ J_s \mathbf{Y} & \xrightarrow{J_s f} & J_s \mathbf{Z} \end{array}$$

Dunque,  $J_k$  è un funtore covariante dalla categoria delle varietà fibrate alla categoria dei fibrati.

Se  $u : \mathbf{Y} \longrightarrow T\mathbf{Y}$  è un campo vettoriale tale che  $u$  è un morfismo di fibrati su un campo vettoriale  $\bar{u} : \mathbf{X} \longrightarrow T\mathbf{X}$  (cioè un *campo vettoriale proiettabile*), allora  $u$  può essere prolungato al campo vettoriale  $u_r : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow TJ_r \mathbf{Y}$  il cui flusso è il prolungamento di ordine  $r$  del flusso di  $u$  (si veda [MaMo83a], [Sau89]).

Se  $1 \leq r$ , esiste un unico morfismo di fibrati [MaMo83a]

$$\mu_r : J_r \mathbf{Y} \times_{J_{r-1} \mathbf{Y}} T^* \mathbf{X} \longrightarrow TJ_{r-1} \mathbf{Y}, \quad 0 \leq \underline{p} \leq r-1,$$

tale che il seguente diagramma commuti per ogni sezione  $s$  di  $\mathbf{Y}$

$$\begin{array}{ccc} J_r \mathbf{Y} \times_{J_{r-1} \mathbf{Y}} T\mathbf{X} & \xrightarrow{\mu_r} & TJ_{r-1} \mathbf{Y} \\ & \swarrow (j_r s)^\dagger & \nearrow Tj_{r-1} s \\ & T\mathbf{X} & \end{array}$$

ove  $(j_r s)^\dagger$  indica un ovvio pull-back. Il morfismo  $\mu_r$  è un morfismo lineare iniettivo su  $\pi_{r-1}^r$  proiettabile su  $\text{id}_{T\mathbf{X}}$  e un morfismo iniettivo su  $J_{r-1} \mathbf{Y} \times_{J_{r-2} \mathbf{Y}} T\mathbf{X}$ . Pertanto, per il teorema del rango, si dimostra facilmente per induzione su  $r$  che  $\pi_{r-1}^r : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow J_{r-1} \mathbf{Y}$  è un sottofibrato affine del fibrato  $J_1 J_{r-1} \mathbf{Y} \longrightarrow J_{r-1} \mathbf{Y}$ , il cui fibrato vettoriale associato

è

$$\bigotimes_{J_r \mathbf{Y}}^r T^* \mathbf{X} \otimes_{J_r \mathbf{Y}} V \mathbf{Y} \longrightarrow J_{r-1} \mathbf{Y} .$$

**Osservazione A.6.2** Si noti che se  $\mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$  è un fibrato affine (vettoriale), allora  $\pi^r : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$  ha una struttura naturale di fibrato affine (vettoriale).  $\square$

Inoltre, si ha il morfismo suriettivo complementare

$$\vartheta_r : J_r \mathbf{Y} \times_{J_{r-1} \mathbf{Y}} T J_{r-1} \mathbf{Y} \longrightarrow V J_{r-1} \mathbf{Y} , \quad 0 \leq \underline{p} \leq r-1 .$$

Si noti che

$$\mathfrak{d}_r \lrcorner \vartheta_r = \vartheta_r \lrcorner \mathfrak{d}_r = 0 \tag{A.2}$$

$$(\vartheta_r)^2 = \vartheta_r \quad (\mathfrak{d}_r)^2 = \mathfrak{d}_r \tag{A.3}$$

Si consideri il morfismo duale

$$\vartheta_r^* : J_r \mathbf{Y} \times_{J_{r-1} \mathbf{Y}} V^* J_{r-1} \mathbf{Y} \longrightarrow J_r \mathbf{Y} \times_{J_{r-1} \mathbf{Y}} T^* J_{r-1} \mathbf{Y} .$$

Si ha il sottofibrato vettoriale

$$\text{im } \vartheta_r^* \subset J_r \mathbf{Y} \times_{J_{r-1} \mathbf{Y}} T^* J_{r-1} \mathbf{Y} \subset T^* J_r \mathbf{Y} , \tag{A.4}$$

e, per  $0 \leq t \leq s \leq r$ , le inclusioni fibrate

$$J_r \mathbf{Y} \times_{J_t \mathbf{Y}} \text{im } \vartheta_t^* \subset J_r \mathbf{Y} \times_{J_s \mathbf{Y}} \text{im } \vartheta_s^* \subset \text{im } \vartheta_r^* . \tag{A.5}$$

Dunque,  $\mathfrak{d}_r$  e  $\vartheta_r$  danno luogo ad una decomposizione su  $J_r \mathbf{Y}$  della successione esatta corta

$$0 \longrightarrow V J_{r-1} \mathbf{Y} \longrightarrow T J_{r-1} \mathbf{Y} \longrightarrow J_{r-1} \mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} T \mathbf{X} \longrightarrow 0 \tag{A.6}$$

e cioè [MaMo83a] ad una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow J_{r-1} \mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} T \mathbf{X} \xrightarrow{\mathfrak{d}_r} T J_{r-1} \mathbf{Y} \xrightarrow{\vartheta_r} V J_{r-1} \mathbf{Y} \longrightarrow 0 \tag{A.7}$$

in cui le mappe  $\mathfrak{d}_r$  e  $\vartheta_r$  sono inverse, rispettivamente, delle mappe  $T J_{r-1} \mathbf{Y} \longrightarrow J_{r-1} \mathbf{Y} \times_{\mathbf{X}} T \mathbf{X}$  e  $V J_{r-1} \mathbf{Y} \longrightarrow T J_{r-1} \mathbf{Y}$ . Pertanto si ha la decomposizione

$$J_r \mathbf{Y} \times_{J_{r-1} \mathbf{Y}} T^* J_{r-1} \mathbf{Y} = \left( J_r \mathbf{Y} \times_{J_{r-1} \mathbf{Y}} T^* \mathbf{X} \right) \oplus \text{im } \vartheta_r^* . \tag{A.8}$$

Si hanno le espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_r &= d^0 \otimes \mathfrak{A}_{r0} = d^0 \otimes (\partial_0 + y_{\underline{p}+1}^j \partial_j^{\underline{p}}), \\ \vartheta_r &= \vartheta_{\underline{p}}^j \otimes \partial_j^{\underline{p}} = (d_{\underline{p}}^j - y_{\underline{p}+1}^j d^0) \otimes \partial_j^{\underline{p}}, \end{aligned}$$

ove  $(\partial_i^{\underline{p}})$  denota i campi vettoriali locali tangenti a  $(y_{\underline{p}}^i)$  e  $(d_{\underline{p}}^j)$  denota la base duale di  $(\partial_j^{\underline{p}})$ . Si introduce la seguente notazione per trattare le derivate ripetute di funzioni rispetto ai campi vettoriali  $\mathfrak{A}_{r0}, \mathfrak{A}_{r+10}, \dots$  in un aperto coordinato. Se  $\mathbf{U} \subset \mathbf{Y}$  è un aperto coordinato e  $g : (\pi_0^r)^{-1}\mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ , allora si pone

$$J_{\underline{p}}g := \mathfrak{A}_{r+|\underline{p}|0} \cdots \mathfrak{A}_{r+10}.$$

Vale la seguente regola di Leibnitz (see [Sau89]); se  $h \in \binom{0}{\Lambda_r}_{\mathbf{U}}$ , allora

$$J_{\underline{p}}(gh) = \sum_{i=0}^{|\underline{p}|} \binom{|\underline{p}|}{i} J_i g J_{|\underline{p}|-i} h.$$

Se  $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{X}$  è una varietà fibrata  $f : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$  è un morfismo di varietà fibrate su  $\mathbf{X}$  si ha l'espressione, rispetto alle coordinate  $(x^0, z^j)$  su  $\mathbf{Z}$

$$z_{\underline{p}}^j \circ J_r f = J_{\underline{p}} f^j \quad 0 \leq \underline{p} \leq r.$$

Sia  $u : \mathbf{Y} \longrightarrow V\mathbf{Y}$  un campo vettoriale verticale con espressione in coordinate  $u = u^i \partial_i$ . Allora, l'espressione in coordinate del prolungamento  $u_r : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow V J_r \mathbf{Y}$  è  $u_r = J_{\underline{p}} u^i \partial_i^{\underline{p}}$ .

È interessante studiare i getti ripetuti della fibrazione  $\pi$ .

**Proposizione A.6.1** *Siano  $r, s \in \mathbb{N}$ . Allora, esiste un unico morfismo di fibrati  $i_{r,s} : J_{r+s} \mathbf{Y} \longrightarrow J_r J_s \mathbf{Y}$  su  $J_s \mathbf{Y}$  tale che, per ogni sezione (locale)  $s : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  si ha*

$$\begin{array}{ccc} J_{r+s} \mathbf{Y} & \xrightarrow{i_{r,s}} & J_r J_s \mathbf{Y} \\ & \swarrow j_{r+s} & \nearrow j_r j_s \\ & J_s \mathbf{Y} & \end{array}$$

inoltre,  $i_{r,s}$  è un morfismo iniettivo.

In coordinate, se  $(x^0, y^i, y_{\underline{p}}^i, \tilde{y}_{\underline{q}}^i, y_{\underline{p};\underline{q}}^i)$  sono coordinate adattate su  $J_r J_s \mathbf{Y}$  (con  $1 \leq \underline{p} \leq s$  e  $1 \leq \underline{q} \leq r$ ), si ha

$$(x^0, y^i, y_{\underline{p}}^i, \tilde{y}_{\underline{q}}^i, y_{\underline{p};\underline{q}}^i) \circ i_{r,s} = (x^0, y^i, y_{\underline{p}}^i, y_{\underline{q}}^i, y_{\underline{p}+\underline{q}}^i).$$

### A.6.b Spazi di getti di sottovarietà

In questa sottosezione sarà esposta la teoria dei getti di ordine  $r$  di sottovarietà di dimensione 1 di una varietà  $\mathbf{M}$  di dimensione  $m \geq 1$ . Tale teoria si generalizza facilmente al caso di sottovarietà di dimensione  $n$  di  $\mathbf{M}$ , con  $n \leq m$ . L'esposizione di questa teoria è presa da [MoVi94].

**Definizione A.6.2** Siano  $s_1, s_2$  due sottovarietà passanti per  $x \in \mathbf{M}$ . Allora, si dice che  $s_1$  è  $r$ -equivalente a  $s_2$  in  $x$  se  $s_1$  e  $s_2$  hanno in  $x$  un contatto di ordine  $r$ .  $\square$

Si noti che la definizione di contatto di ordine  $k$  fra due sottovarietà può essere formulata tramite le carte; essa è, pertanto, una nozione che dipende solamente dalla struttura differenziabile. Tuttavia, per alcuni scopi, è possibile dare una definizione equivalente tramite gli spazi tangenti di ordine  $r$ . Si veda anche l'osservazione A.6.1.

La precedente definizione induce una relazione d'equivalenza nell'insieme delle sottovarietà di dimensione 1 di  $\mathbf{M}$  passanti per  $x$ . Posto  $J_{rx}(\mathbf{M}, 1)$  l'insieme quoziente di tale relazione d'equivalenza, si definisce *spazio dei getti di ordine  $r$  delle sottovarietà di dimensione 1 di  $\mathbf{M}$*  l'insieme

$$J_r(\mathbf{M}, 1) := \bigsqcup_{x \in \mathbf{M}} J_{rx}(\mathbf{M}, 1)$$

(si noti che  $J_0 J_{rx}(\mathbf{M}, 1) = \mathbf{M}$ ).

Una carta su  $M$  è detta *divisa* se l'insieme delle sue funzioni coordinate è diviso in due sottoinsiemi di 1 e  $m - 1$  elementi. Una carta divisa sarà denotata da

$$(x^0, x^i), \quad 1 \leq i \leq m - 1.$$

Una carta divisa ed una sottovarietà di dimensione 1  $s \subset M$  sono dette *correlate* se la sottovarietà  $s$  può essere espressa localmente da formule del tipo

$$x^i = s^i(x^0);$$

cioè, più precisamente,  $x^i|_s = s^i \circ x^0|_s$ , con  $s^i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

L'insieme  $J_r(\mathbf{M}, 1)$  è munito di una struttura di varietà differenziabile dalla famiglia delle carte

$$(x^0, x^i_p)$$

indotte su  $J_r(\mathbf{M}, 1)$  da ogni carta divisa  $(x^0, x^i)$  nel modo seguente

$$x^i_p : J_r(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow \mathbb{R} : [s]_x \longmapsto \partial_p x^i$$

per  $0 \leq \underline{p} \leq r$ ; in particolare, si ha  $x_{\underline{0}}^i = x^i$ . Per  $r = 0, 1, 2, 3$ , gli indici saranno scritti esplicitamente, secondo la regola  $x_{\underline{0}}^i = x^i$ ,  $x_{\underline{1}}^i = x_0^i$ ,  $x_{\underline{2}}^i = x_{00}^i$ ,  $x_{\underline{3}}^i = x_{000}^i$ .

Sia  $0 \leq s \leq r$ ; si hanno le proiezioni naturali

$$\pi_s^r : J_r(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow J_s(\mathbf{M}, 1), \quad \pi^r : J_r(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow \mathbf{M}.$$

Tali proiezioni sono varietà fibrate. Nel caso  $r = 1$  si ha un isomorfismo naturale

$$J_1(M, 1) \longrightarrow G_1(TM, 1) : \phi \longmapsto L_\phi.$$

ove  $L_\phi \subset T_\phi \mathbf{M}$  è lo spazio tangente in  $\phi$  ad una sottovarietà nella classe di equivalenza  $\phi$ . Questo rende  $\pi^1 : J_1(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow \mathbf{M}$  un fibrato la cui fibra-tipo è la varietà di Grassmann dei sottospazi di dimensione 1 di uno spazio vettoriale di dimensione  $m$ . Se  $\phi \in J_1(M, 1)$ , allora il sottospazio  $L_\phi \subset T_\phi M$  è generato nel modo seguente

$$L_\phi = \langle \partial_0 + \partial_0 s^i \partial_i \rangle.$$

Data una varietà di dimensione 1  $s \subset M$  e  $k \in \mathbb{N}$ , si ha la mappa

$$j_k s : s \longrightarrow J_k(M, 1) : x \longmapsto j_k s(x).$$

Chiaramente  $j_k s(s) \subset J_k(M, 1)$  è una sottovarietà fibrata con fibre di dimensione 1. Si ha l'espressione in coordinate

$$x_{\underline{p}}^i \circ j_1 s = \partial_{\underline{p}} s^i.$$

Ora, è possibile introdurre l'analogo della mappa  $\mathfrak{d}_r$ , precedentemente definita per i getti di fibrazioni, in questo contesto. La maggiore difficoltà risiede nel fatto che, nel caso dei getti di sottovarietà, non è possibile fornire l'analogo della successione esatta corta (A.6). Tuttavia, è possibile fornire l'analogo della successione esatta corta (A.7).

Si definisce, per  $r \geq 1$ , il seguente sottofibrato

$$K_r(\mathbf{M}, 1) := \left\{ (\phi, \sigma) \in J_r(\mathbf{M}, 1) \times_{J_{r-1}(\mathbf{M}, 1)} T J_r(\mathbf{M}, 1) \mid \sigma \in L_\phi \right\},$$

In una carta  $(x^0, y_{\underline{p}}^i)$  intorno a  $\phi \in J_r(\mathbf{M}, 1)$ , se  $(\phi, \sigma) \in K_r(\mathbf{M}, 1)$ , allora si ha  $\sigma = \sigma^0 (\partial_0 + y_{\underline{p}+1}^i \partial_i^{\underline{p}})$ , con  $0 \leq \underline{p} \leq r-1$ . Pertanto, si definiscono le carte fibrate  $(x^0, y_{\underline{p}}^i, z^0)$  su  $K_r(\mathbf{M}, 1)$  ponendo

$$z^0(\phi, \sigma) := \sigma^0.$$

Si ha l'inclusione fibrata naturale

$$\mathfrak{d}_r : K_r(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow J_r(\mathbf{M}, 1) \times_{J_{r-1}(\mathbf{M}, 1)} T J_r(\mathbf{M}, 1) ,$$

che ha espressione in coordinate

$$\mathfrak{d}_r = z^0 \otimes (\partial_0 + y_{p+1}^i \partial_i^p) ,$$

con  $0 \leq p \leq r - 1$ .

Inoltre, si introduce il fibrato vettoriale quoziente

$$W_r(\mathbf{M}, 1) := \bigsqcup_{\phi \in J_r(\mathbf{M}, 1)} T_{\pi^r(\phi)} \mathbf{M} / L_{phi} .$$

Data una carta  $(x^0, y_{\underline{p}}^i)$  intorno a  $\phi \in J_r(\mathbf{M}, 1)$ , si definiscono le carte fibrate  $(x^0, y_{\underline{p}}^i, z^i)$  su  $W_r(\mathbf{M}, 1)$  ponendo

$$z_{\underline{p}}^i(\phi, [\sigma]) := \sigma_{\underline{p}}^i - \sigma^0 \partial_{p+1}^i s^i .$$

Si ha il morfismo fibrato suriettivo naturale su  $J_r(\mathbf{M}, 1)$

$$\vartheta_r : J_r(\mathbf{M}, 1) \times_{J_{r-1}(\mathbf{M}, 1)} T J_r(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow W_r(\mathbf{M}, 1) : (\phi, \sigma) \longmapsto [\sigma] ,$$

che ha espressione in coordinate

$$\vartheta_r = (d_{\underline{p}}^i - y_{p+1}^i d^0) \otimes \zeta_i^p ,$$

ove  $(\zeta_i^p)$  è a base corrispondente alle coordinate  $(z_{\underline{p}}^i)$ .

Pertanto, si ha la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow K_r(\mathbf{M}, 1) \xrightarrow{\mathfrak{d}_r} J_r(\mathbf{M}, 1) \times_{J_{r-1}(\mathbf{M}, 1)} T J_r(\mathbf{M}, 1) \xrightarrow{\vartheta_r} W_r(\mathbf{M}, 1) \longrightarrow 0 \quad (\text{A.9})$$

la quale, a differenza di (A.7), non possiede una decomposizione naturale del tipo di (A.6).

Anche per i getti di sottovarietà è possibile introdurre le nozioni di prolungamento di diffeomorfismi e di campi, e studiare i getti ripetuti; queste nozioni, tuttavia, non sono utilizzate in questo lavoro.

## A.7 Connessioni

Molte costruzioni geometriche in questo lavoro sono basate sulla teoria delle connessioni. Alcuni fra i testi fondamentali per la teoria delle connessioni sono [KoNo63], [GHV72]. Qui saranno esposti gli aspetti non standard di un approccio nel contesto degli spazi di getti, sviluppato in [MaMo83a], e successivamente in [Sau89].

### A.7.a Parentesi di Frölicher–Nijenhuis

In questa sottosezione sarà introdotta una struttura di algebra gradata su una classe di fasci di forme a valori vettoriali [FrNi56], [MaMo83a], [JaMo93a]. Questa struttura permette di recuperare molte delle operazioni che si effettuano tramite una connessione (curvatura, torsione, differenziale covariante, ecc.).

Sia  $\mathbf{M}$  una varietà, e siano  $\overset{k}{\Lambda}$  il fascio delle  $k$ -forme su  $\mathbf{M}$ , e  $\mathcal{T}$  il fascio di campi vettoriali su  $\mathbf{M}$ . Il fascio  $\overset{k}{\Lambda} \otimes \mathcal{T}$ , ove il prodotto tensoriale è fatto rispetto all'anello  $C^\infty(\mathbf{M})$  è detto fascio delle  $k$ -forme a valori nella tangente di  $\mathbf{M}$ .

Per ogni  $k, h \in \mathbb{N}$  esiste un unico morfismo di fasci

$$[,] : \overset{k}{\Lambda} \otimes \mathcal{T} \times \overset{h}{\Lambda} \otimes \mathcal{T} \longrightarrow \overset{k+h}{\Lambda} \otimes \mathcal{T}$$

definito tramite la sua azione sulle sezioni decomponibili come

$$\begin{aligned} [\alpha \otimes u, \beta \otimes v] &= \alpha \wedge \beta \otimes [u, v] + \alpha \wedge L_u \beta \otimes v - (-1)^{kh} \beta \wedge L_v \alpha \otimes u \\ &\quad + (-1)^k i_v \alpha \wedge d\beta \otimes u - (-1)^{kh+h} i_u \beta \wedge d\alpha \otimes v. \end{aligned}$$

Se  $(x^\lambda)$  sono coordinate su  $\mathbf{M}$ , e se  $(\partial_\lambda), (d^\lambda)$  sono le corrispondenti basi locali per i campi e le forme, si ha la seguente espressione in coordinate:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^\mu d^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge d^{\lambda_k} \otimes \partial_\mu, \quad \psi = \psi_{\lambda_1 \dots \lambda_h}^\mu d^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge d^{\lambda_h} \otimes \partial_\mu, \\ [ \phi, \psi ] &= \left( \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^\rho \partial_\rho \psi_{\lambda_{k+1} \dots \lambda_{k+h}}^\mu - (-1)^{kh} \psi_{\lambda_1 \dots \lambda_h}^\rho \partial_\rho \phi_{\lambda_{h+1} \dots \lambda_{h+k}}^\mu \right. \\ &\quad \left. - k \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \rho}^\mu \partial_{\lambda_k} \psi_{\lambda_{k+1} \dots \lambda_{k+h}}^\rho + (-1)^{kh} h \psi_{\lambda_1 \dots \lambda_{h-1} \rho}^\mu \partial_{\lambda_h} \phi_{\lambda_{h+1} \dots \lambda_{h+k}}^\rho \right) \\ &\quad \cdot d^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge d^{\lambda_{k+h}} \otimes \partial_\mu \end{aligned}$$

Il morfismo  $[,]$  è detto *parentesi di Frölicher–Nijenhuis*. Il fascio  $\overset{*}{\Lambda} \otimes \mathcal{T}$  è dotato da  $[,]$  di una struttura di algebra gradata; ovvero,  $[,]$  è  $\mathbb{R}$ -bilineare e valgono le proprietà

$$\begin{aligned} [\phi, \psi] &= -(-1)^{|\phi||\psi|} [\psi, \phi] \\ [\theta, [\phi, \psi]] &= [[\theta, \phi], \psi] + (-1)^{|\theta||\phi|} [\phi, [\theta, \psi]] \end{aligned}$$

**Osservazione A.7.1** Sia  $\pi : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  una varietà fibrata. Allora, esiste una sottoalgebra distinta dell'algebra di Frölicher–Nijenhuis su  $\mathbf{F}$ . In particolare, si denoti rispettivamente con  $\overset{*}{\Lambda}(\mathbf{F}), \overset{*}{\Lambda}(\mathbf{M})$ , le algebre esterne su  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{M}$ , con  $\mathcal{T}(\mathbf{F})$  e  $\mathcal{T}_p(\mathbf{F})$  il fascio dei campi vettoriali su  $\mathbf{F}$  e il suo sottofascio dei campi vettoriali proiettabili, cioè dei campi  $u : \mathbf{F} \longrightarrow T\mathbf{F}$  che sono morfismi di fibrato su di un campo  $\tilde{u} : \mathbf{M} \longrightarrow T\mathbf{M}$ . Si ha la

sottoalgebra delle forme proiettabili

$${}^*\Lambda(\mathbf{M}) \otimes \mathcal{T}_p(\mathbf{F}) \subset {}^*\Lambda(\mathbf{F}) \otimes \mathcal{T}(\mathbf{F}),$$

ove il primo prodotto tensoriale è fatto rispetto all'anello  $C^\infty(\mathbf{M})$ . Questa sottoalgebra è di importanza fondamentale in teoria delle connessioni. Se  $\phi \in {}^k\Lambda(\mathbf{M}) \otimes \mathcal{T}_p(\mathbf{F})$ , e se  $(x^\lambda, y^i)$  sono coordinate adatte in  $\mathbf{F}$ , allora si ha l'espressione in coordinate

$$\phi = (\phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^\mu \partial_\mu + \phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^i \partial_i) d^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge d^{\lambda_k},$$

con  $\phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^\mu \in C^\infty(\mathbf{M})$  e  $\phi_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^i \in C^\infty(\mathbf{F})$ . □

### A.7.b Connessioni

D'ora in avanti, nel resto della presente sezione, si suppone che  $\pi : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  è una varietà fibrata. Una carta su  $\mathbf{F}$  adattata alla fibrazione sarà denotata da  $(x^\lambda, y^i)$ , e le corrispondenti basi locali per i campi e le forme rispettivamente da  $(\partial_\lambda, \partial_i)$  e  $(d^\lambda, d^i)$ .

**Osservazione A.7.2** Si ha la seguente successione esatta corta di morfismi di fibrati vettoriali su  $\text{id}_{\mathbf{F}}$

$$0 \longrightarrow V\mathbf{F} \xrightarrow{i} T\mathbf{F} \xrightarrow{(\tau_{\mathbf{F}}, T\pi)} \mathbf{F} \times_M T\mathbf{M} \longrightarrow 0,$$

ove  $i$  è l'inclusione. □

**Lemma A.7.1** *Le seguenti condizioni si equivalgono*

1. esiste un morfismo di fibrato  $c : \mathbf{F} \times_M T\mathbf{M} \longrightarrow T\mathbf{F}$  su  $\text{id}_{\mathbf{F}}$  tale che

$$(\tau_{\mathbf{F}}, T\pi) \circ c = \text{id}_{\mathbf{F} \times_M T\mathbf{M}};$$

2. esiste un morfismo di fibrato  $\nu_c : T\mathbf{F} \longrightarrow V\mathbf{F}$  su  $\text{id}_{\mathbf{F}}$  tale che

$$\nu_c \circ i = \text{id}_{V\mathbf{F}};$$

3. esiste un sottofibrato vettoriale  $H_c\mathbf{F}$  tale che

$$T\mathbf{F} = H_c\mathbf{F} \oplus_{\mathbf{F}} V\mathbf{F};$$

4. esiste una sezione  $c : \mathbf{F} \longrightarrow J_1\mathbf{F}$ .

DIMOSTRAZIONE. La corrispondenza fra  $c : \mathbf{F} \times_{\mathbf{M}} \mathbf{TM} \longrightarrow \mathbf{TF}$  e  $\nu_c$  è data considerando  $c$  e  $\nu_c$  come due 1-forme a valori vettoriali su  $\mathbf{F}$ , sezioni del fascio  $\overset{1}{\Lambda} \otimes \mathcal{T}$ . Si ha, infatti,

$$\text{id}_{\mathbf{TF}} = c + \nu_c .$$

Inoltre,  $\nu_c$  può essere vista come la seconda proiezione di una decomposizione  $\mathbf{TF} = H_c \mathbf{F} \oplus V \mathbf{F}$ .

Infine, il morfismo  $\mathcal{d}_1$  permette di identificare  $J_1 \mathbf{F}$  con un sottofibrato affine di  $T^* \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{TF}$ , costituito dalle applicazioni lineari che si proiettano su  $\text{id}_{\mathbf{TM}}$ . Da qui l'identificazione di  $c : \mathbf{F} \times_{\mathbf{M}} \mathbf{TM} \longrightarrow \mathbf{TF}$  con  $c : \mathbf{F} \longrightarrow J_1 \mathbf{F}$ . □

**Definizione A.7.1** Si definisce *connessione* sulla varietà fibrata  $\pi : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  uno degli oggetti geometrici elencati nel lemma precedente. □

Si hanno le espressioni in coordinate

$$\begin{aligned} c &= d^\lambda \otimes (\partial_\lambda + c_\lambda^i \partial_i) \\ \nu_c &= (d^i - c_\lambda^i d^\lambda) \otimes \partial_i \\ (x^\lambda, y^i, y_\lambda^i) \circ c &= (x^\lambda, y^i, c_\lambda^i) \end{aligned}$$

ove  $(y_\lambda^i)$  sono le coordinate indotte da una carta fibrata sulla fibra di  $J_1 \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}$ .

Il sottofibrato  $H_c \mathbf{F}$  prende il nome di *sottofibrato orizzontale* associato alla connessione  $c$ . Una base locale per le sezioni di  $H_c \mathbf{F}$  è data da  $\partial_\lambda + c_\lambda^i \partial_i$ . La proiezione  $T\pi : \mathbf{TF} \longrightarrow \mathbf{TM}$  si restringe ad un isomorfismo lineare fra le fibre di  $H_c \mathbf{F}$  e le fibre di  $\mathbf{TM}$ .

Ora verrà introdotta la nozione di derivata covariante. Sia  $c : \mathbf{F} \longrightarrow J_1 \mathbf{F}$  una connessione su  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$ . Il morfismo fibrato

$$\nabla[c] : J_1 \mathbf{F} \longrightarrow T^* \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{M}} V \mathbf{F} : \sigma_1 \longmapsto \sigma_1 - c(\pi_0^1(\sigma_1))$$

è detto *morfismo fibrato di traslazione* associato a  $c$ . La sua espressione in coordinate è

$$\nabla[c] = (y_\lambda^i - c_\lambda^i) d^\lambda \otimes \partial_i .$$

Se  $s : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  è una sezione (locale), allora si definisce la *derivata covariante di  $s$*  come la sezione

$$\nabla[c]s := \nabla[c] \circ j_1 s : \mathbf{X} \longrightarrow T^* \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{M}} V \mathbf{F} .$$

Si ha l'espressione in coordinate

$$\nabla[c]s = (\partial_\lambda s^i - c_\lambda^i \circ s) d^\lambda \otimes (\partial_i \circ s) .$$

Sia  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  un fibrato affine (vettoriale), e sia  $c$  una connessione su  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$ . Allora  $c$  si dice *affine (lineare)* se è un morfismo di fibrato affine (vettoriale) su  $\text{id}_\mathbf{M}$ . In coordinate, tali connessioni sono caratterizzate da  $c_\lambda^i = c_{\lambda j}^i y^j + c_\lambda^i$ , ove  $c_{\lambda j}^i, c_\lambda^i \in C^\infty(\mathbf{M})$  ( $c_\lambda^i = 0$  nel caso lineare).

In particolare, se  $c$  e  $c'$  sono due connessioni lineari rispettivamente sui fibrati vettoriali  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  e  $\mathbf{F}' \longrightarrow \mathbf{M}$ , allora:

1. esiste un'unica connessione lineare  $c \otimes c'$  su  $\mathbf{F} \otimes \mathbf{F}' \longrightarrow \mathbf{M}$  tale che  $\nabla[c \otimes c']s \otimes s' = (\nabla[c]s) \otimes s' + s \otimes (\nabla[c']s')$  per ogni coppia di sezioni  $s : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{F}$ ,  $s' : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{F}'$ ;
2. esiste un'unica connessione lineare  $c^*$  su  $\mathbf{F}^* \longrightarrow \mathbf{M}$  tale che  $d(\alpha \lrcorner s) = (\nabla[c^*]\alpha) \lrcorner s + \alpha \lrcorner (\nabla[c]s)$ .

In tal modo, può essere costruita una connessione lineare sul fibrato dei tensori  $\otimes_h^k \mathbf{F}^*$  su  $\mathbf{M}$  [KoNo63, MaMo83a].

Se  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  è un fibrato di linea complesso, con una metrica hermitiana  $h$ , allora una connessione lineare complessa hermitiana su  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  è una connessione  $c$  tale che  $\nabla[c]i = 0$  e  $\nabla[c]h = 0$ . Se  $(x^\lambda, z)$  denota una carta adattata complessa, e  $b$  denota la base locale per le sezioni complesse, allora si ha l'espressione in coordinate

$$c = d^\lambda \otimes (\partial_\lambda + i c_\lambda \mathfrak{n}),$$

ove  $\mathfrak{n}$  denota la forma di Liouville  $\text{id}_\mathbf{Q}$ .

Ora sarà introdotta la nozione di connessione del secondo ordine. Questa nozione è usata in questo lavoro nello studio della meccanica delle particelle, e quindi verrà introdotta esclusivamente per il caso di una varietà fibrata con base di dimensione 1. Sia, dunque,  $\mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$  una varietà fibrata, con  $\dim \mathbf{X} = 1$ .

**Definizione A.7.2** Una sezione  $c : J_1 \mathbf{Y} \longrightarrow J_2 \mathbf{Y}$  è detta *connessione del secondo ordine* sulla varietà fibrata  $\pi : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ .  $\square$

Tenendo conto della varietà fibrata  $J_1 \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ , si ha il morfismo di varietà fibrate iniettivo  $\mathfrak{d}_1 : J_1 J_1 \mathbf{Y} \longrightarrow T^* \mathbf{X} \otimes_{\mathbf{X}} T J_1 \mathbf{Y}$ . Inoltre, considerando l'inclusione fibrata  $i_{1,1} : J_2 \mathbf{Y} \longrightarrow J_1 J_1 \mathbf{Y}$ , si può realizzare  $J_2 \mathbf{Y}$  come il sottofibrato affine del fibrato vettoriale  $T^* \mathbf{X} \otimes_{\mathbf{X}} T J_1 \mathbf{Y}$  che si proietta sul sottofibrato affine  $J_1 \mathbf{Y} \subset T^* \mathbf{X} \otimes_{\mathbf{X}} T \mathbf{E}$ .

Pertanto, una connessione del secondo ordine  $c : J_1 \mathbf{Y} \longrightarrow J_2 \mathbf{Y}$  è un particolare tipo di connessione sulla varietà fibrata  $J_1 \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ ; in particolare, la coppia  $(c, \mathfrak{d}_1)$  risulta essere un morfismo di fibrati, e in coordinate si ha

$$c = d^0 \otimes (\partial_0 + y_0^i \partial_i + c^i \partial_0^i) .$$

La sezione termina con un'esposizione della nozione di connessione universale. Siano  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  e  $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{M}$  due varietà fibrate.

**Definizione A.7.3** Un morfismo fibrato su  $\mathbf{F}$

$$\xi : \mathbf{C} \times_{\mathbf{M}} \mathbf{F} \longrightarrow J_1 \mathbf{F}$$

è detto *sistema di connessioni* su  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$ .  $\square$

In altre parole, un sistema di connessioni su  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  equivale ad una famiglia di connessioni su  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  parametrizzate dalle sezioni di  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$ .

**Definizione A.7.4** Una connessione

$$\Lambda : \mathbf{F}^\uparrow \longrightarrow T^* \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{F}^\uparrow} T(\mathbf{F}^\uparrow),$$

sulla varietà fibrata pull-back

$$\mathbf{F}^\uparrow := \mathbf{C} \times_{\mathbf{M}} \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F},$$

tale che la restrizione del codominio al fibrato  $V^* \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{F}^\uparrow} T(\mathbf{F}^\uparrow)$  è nulla, è detta connessione universale su  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$ .  $\square$

Si può facilmente dimostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i sistemi di connessioni e le connessioni universali. Se  $(x^\lambda, y^i)$  e  $(x^\lambda, z^a)$  sono coordinate adattate rispettivamente in  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{Z}$ , e se  $(\partial_\lambda, \partial_i)$ ,  $(d^\lambda, d^i)$ ,  $(\partial_\lambda, \partial_a)$   $(d^\lambda, d^a)$  sono le rispettive basi locali per i campi e le forme, allora si ha in coordinate

$$\begin{aligned} \xi &= d^\lambda \otimes \partial_\lambda + \xi_\lambda^i d^\lambda \otimes \partial_i \\ \Lambda &= d^\lambda \otimes \partial_\lambda + d^a \otimes \partial_a + \Lambda_\lambda^i d^\lambda \otimes \partial_i \end{aligned}$$

ove  $\xi_\lambda^i, \Lambda_\lambda^i \in C^\infty(\mathbf{F}^\uparrow)$ , e la corrispondenza biunivoca è data in coordinate da  $\xi_\lambda^i \longmapsto \Lambda_\lambda^i$ .

### A.7.c Curvatura

In questa sottosezione supponiamo che  $c : \mathbf{F} \longrightarrow T^* \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{M}} T \mathbf{F}$  sia una data connessione su  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$ .

Si definisce *differenziale covariante* di una forma  $\phi \in \Lambda^k \otimes \mathcal{T}$  a valori nel tangente la seguente forma a valori nel tangente

$$d_c \phi := [c, \phi] : \mathbf{F} \longrightarrow \wedge^{k+1} T^* \mathbf{F} \otimes_{\mathbf{F}} T \mathbf{F}.$$

In particolare, essendo  $c$  una 1–forma proiettabile  $c \in \overset{1}{\Lambda}(\mathbf{M}) \otimes \mathcal{T}_p(\mathbf{F})$ , se  $\phi \in \overset{k}{\Lambda}(\mathbf{M}) \otimes \mathcal{T}_p(\mathbf{F})$  allora il differenziale covariante di  $\phi$  è una forma proiettabile a valori verticali

$$d_c \phi : \mathbf{F} \longrightarrow \overset{k+1}{\wedge} T^* \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{F}} V \mathbf{F} .$$

**Definizione A.7.5** La seguente 2–forma

$$R[c] := \frac{1}{2}[c, c] : \mathbf{F} \longrightarrow \overset{2}{\wedge} T^* \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{F}} V \mathbf{F}$$

è detta *curvatura* di  $c$ . □

Si ha l’espressione in coordinate

$$R[c] = (\partial_\lambda c_\mu^i + c_\lambda^j \partial_j c_\mu^i) d^\lambda \wedge d^\mu \otimes \partial_i .$$

Dalla caratterizzazione di  $[\cdot, \cdot]$  mediante l’azione sulle forme decomponibili si ha l’identità

$$2R[c](X, Y) = [c(X), c(Y)] - c([X, Y])$$

per ogni  $X, Y : \mathbf{M} \longrightarrow T\mathbf{M}$ . Quindi, la curvatura misura il grado di non involutività della distribuzione orizzontale  $H_c \mathbf{F}$ .

Si ha l’*identità di Bianchi generalizzata*

$$d_c^2 \phi = [R[c], \phi]$$

che è valida per ogni  $\phi \in \overset{*}{\Lambda}(\mathbf{F}) \otimes \mathcal{T}(\mathbf{F})$ . Se  $\phi \in \overset{*}{\Lambda}(\mathbf{M}) \otimes \mathcal{T}_p(\mathbf{F})$ , allora dall’espressione in coordinate si deduce

$$d_c^2 \phi = -R_c \bar{\wedge} \phi$$

e per  $\phi = c$  si ha

$$d_c R[c] = 0 ,$$

come si può facilmente vedere usando le proprietà algebriche di  $[\cdot, \cdot]$ .

Sia  $\sigma : \mathbf{F} \longrightarrow T^* \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{M}} T \mathbf{F}$ . Allora, la *torsione di  $c$  rispetto  $\sigma$*  è definita come la 2–forma

$$\mathbb{T}[c] := d_c \sigma : \mathbf{F} \longrightarrow \overset{2}{\wedge} T^* \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{M}} V \mathbf{F} .$$

L'identità di Bianchi fornisce  $d_c T[c] = [R[c], \sigma]$ .

Infine, si analizza la curvatura di alcuni particolari tipi di connessione.

Sia  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  un fibrato vettoriale con una connessione lineare  $c$ . Allora, la curvatura di  $c$  è la 2-forma

$$R[c] : \mathbf{M} \longrightarrow \overset{2}{\wedge} T^* \mathbf{M} \underset{\mathbf{M}}{\otimes} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^* .$$

Se l'espressione in coordinate di  $c$  rispetto ad una carta adattata lineare  $(x^\lambda, y^i)$  è  $c = d^\lambda \otimes (\partial_\lambda + c_{\lambda j}^i y^j \partial_i)$ , allora si ha

$$R[c] = (\partial_\lambda c_{\mu j}^i + c_{\lambda j}^k c_{\mu k}^i) d^\lambda \wedge d^\mu \otimes e_i \otimes e^j ,$$

ove  $(e_i)$  è la base locale per le sezioni di  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  corrispondente alle coordinate  $y^i$ , e  $(e^i)$  è la sua base duale.

Sia  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  un fibrato di linea complesso hermitiano con una connessione lineare complessa hermitiana  $c$ . Allora, ricordando l'espressione in coordinate di  $c$  data nella precedente sottosezione, si ha

$$R[c] : \mathbf{M} \longrightarrow \overset{2}{\wedge} T^* \mathbf{M} \underset{\mathbf{M}}{\otimes} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^* ,$$

e si ha l'espressione in coordinate

$$R[c] = i \partial_\lambda c_\mu d^\lambda \wedge d^\mu \otimes \mathfrak{H} .$$

Siano  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  e  $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{M}$  due varietà fibrate, e sia  $\Lambda : \mathbf{F}^\uparrow \longrightarrow T^* \mathbf{C} \underset{\mathbf{F}^\uparrow}{\otimes} T \mathbf{F}^\uparrow$  una connessione universale su  $\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{M}$  (la cui espressione in coordinate è stata data in precedenza). Allora la curvatura di  $\Lambda$  è la 2-forma

$$R[\Lambda] : \mathbf{F}^\uparrow \longrightarrow \overset{2}{\wedge} T^* \mathbf{C} \underset{\mathbf{F}^\uparrow}{\otimes} V \mathbf{F} ,$$

di espressione in coordinate

$$R[\Lambda] = ((\partial_\lambda \Lambda_\mu^i + \Lambda_\lambda^j \partial_j \Lambda_\mu^i) d^\lambda \wedge d^\mu + \partial_a \Lambda_\mu^i d^a \wedge d^\mu) \partial_i .$$

Tale curvatura è caratterizzata dal fatto che la curvatura di ogni connessione  $c$  del sistema di connessioni associato a  $\Lambda$  si ottiene con il pull-back mediante  $c$  di  $\Lambda$ .

## A.8 Principi variazionali

In questa sezione è data una formulazione geometrica per il calcolo delle variazioni nella meccanica lagrangiana ([GoSt73], [Kru73], [Tul75], [Gar74], [FeFr82], [GaMu82],

[Fer83], [Kol83], [MaMo83b], [Cos94]). Lo scopo è di giustificare la scelta della sottosuccessione di contatto nel bicomplesso lagrangiano nel capitolo 1.

Si supponga che sia data una sezione  $L \in \mathcal{H}_r^1$ , che sarà detta Lagrangiana. Allora, l'azione della lagrangiana  $L$  su una sezione  $s : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{Y}$  ( $\mathbf{I}$  è un aperto di  $\mathbf{X}$  a chiusura compatta) è definita come il numero reale

$$\int_{\mathbf{I}} (j_r s)^* L .$$

Un campo vettoriale verticale  $u : \mathbf{Y} \longrightarrow V\mathbf{Y}$  definito su  $t^{-1}(\mathbf{I})$  e che si annulla su  $\pi^{-1}(\partial\mathbf{I})$  è detto *campo di variazione*.

Una sezione  $s : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{Y}$  è detta *sezione critica* se, per ogni campo di variazione con flusso  $\phi_p$ , si ha

$$\delta \int_{\mathbf{I}} (J_r \phi_p \circ j_r s)^* L = 0 ,$$

ove  $\delta$  è la derivata variazionale rispetto al parametro  $p$ , e  $J_r \phi_p : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow J_r \mathbf{Y}$  è il primo prolungamento del morfismo  $\phi_p$ .

Si può dimostrare che la condizione precedente equivale a

$$\int_{\mathbf{I}} (j_r s)^* L_{u_r} L = 0$$

per ogni campo di variazione  $u$ , ove  $u_r : J_r \mathbf{Y} \longrightarrow VJ_r \mathbf{Y}$  è il prolungamento di ordine  $r$  di  $u$  e  $L_{u_r}$  è la derivata di Lie.

Usando la decomposizione della proposizione 1.3.4 insieme a  $L_{u_r} L = i_{u_r} dL$  e il teorema di Stokes si vede che l'equazione precedente è equivalente all'equazione

$$\int_{\mathbf{I}} (j_{2r} s)^* (u \lrcorner E_{dL}) = 0$$

per ogni campo di variazione  $u$ . Infine, per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni la condizione precedente è equivalente a

$$(j_{2r} s)^* E_{dL} = 0 ,$$

o, che è lo stesso,  $E_{dL} \circ j_{2r} s = 0$ .

**Osservazione A.8.1** L'insieme delle forme  $\alpha \in \mathring{\Lambda}_r^1$  tali che  $(j_r s)^* \alpha = 0$  per ogni sezione  $s : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$  coincide con il fascio  $\mathring{\mathcal{C}}_r^1$ . Questa è la ragione della scelta del fascio  $\mathring{\Theta}_r^1$  come primo fascio della sottosuccessione di contatto.

Per quanto riguarda il fascio  $\mathring{\Theta}_r^2$ , si vede che questo coincide con il fascio delle forme che non danno contributo all'ultima equazione integrale.

Analogamente, si può definire la variazione seconda di un operatore di tipo Eulero–Lagrange [Tak79]; il fascio  $\overset{3}{\Theta}_r$  è precisamente il fascio delle forme che non danno contributo a tale variazione seconda.  $\square$

**Osservazione A.8.2** Data  $\alpha \in \overset{1}{\Lambda}_1$ , si può estendere la definizione di azione ad una lagrangiana del primo ordine generalizzata  $\alpha$ : tale azione è data su una sezione  $s : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{Y}$  come  $\int_{\mathbf{I}}(j_r s)^* \alpha$ . Per mezzo di un pull-back su  $J_2 \mathbf{Y}$ , si ottiene l'azione equivalente  $\int_{\mathbf{I}}(j_r s)^* h(\alpha)$ , essendo  $\int_{\mathbf{I}}(j_r s)^* v(\alpha) = 0$ , e si ha  $h(\alpha) \in \overset{1}{\mathcal{V}}_1$ . Questo spiega come la successione lagrangiana del primo ordine generalizza il calcolo delle variazioni del primo ordine.  $\square$

## A.9 Varietà riemanniane a simmetria sferica

In questa appendice verrà data una definizione di varietà riemanniane a simmetria sferica, sviluppata in [Vit95a], insieme ad alcune conseguenze interessanti. Le fonti sono [KoNo63, GHL90, Kli82]; in particolare, [Kli82] è stato usato per risultati sulle geodetiche, and [KoNo63] per quanto concerne i gruppi di isometria.

Prima di tutto, è dato un riassunto dei preliminari matematici standard.

Sia  $(\mathbf{M}, g)$  una varietà riemanniana. Si ricordi che il gruppo  $\mathcal{I}(\mathbf{M})$  delle isometrie di  $\mathbf{M}$  è un gruppo di Lie che agisce effettivamente su  $\mathbf{M}$  a sinistra [KoNo63, p. 239]. Il sottogruppo di isotropia  $\mathcal{I}_{\sqrt{\cdot}}(\mathbf{M})$  in  $p \in \mathbf{M}$  è un sottogruppo di Lie compatto di  $\mathcal{I}(\mathbf{M})$  [KoNo63, p. 49].

È importante notare che, dato  $p \in \mathbf{M}$ , c'è un  $\rho \in \mathbb{R}^+$  tale che il gruppo ortogonale  $O(g_p)$  agisce liberamente (ma non necessariamente isometricamente) sulle sfere geodetiche di  $\mathbf{M}$  centrate in  $p$  di raggio  $r < \rho$  (*intorno fortemente convesso*, [Kli82]). Ciò è dovuto al fatto che esiste un  $\rho \in \mathbb{R}^+$  tale che la mappa esponenziale  $\exp_p : T_p \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$  induce un diffeomorfismo fra le bocce in  $T_p \mathbf{M}$  centrate in 0 di raggio  $r < \rho$  e le sfere geodetiche in  $\mathbf{M}$  centrate in  $p$  di raggio  $r < \rho$ , ma questo diffeomorfismo non si estende, in generale, a  $\mathbf{M}$ .

Siccome l'interesse è di dare una definizione globale di simmetria sferica, e siccome l'idea intuitiva di simmetria sferica è rappresentata usualmente richiedendo l'esistenza di una azione libera del gruppo  $SO(3)$  su di una varietà, è naturale impiegare, a tal fine, l'azione locale indotta dalla mappa esponenziale.

**Definizione A.9.1** La varietà riemanniana  $\mathbf{M}$  è detta *sfericamente simmetrica rispetto a  $p \in \mathbf{M}$*  se l'azione locale di  $O(g_p)$  su  $\mathbf{M}$  tramite la mappa  $\exp_p$  è globalmente estendibile ad una azione mediante isometrie.  $\square$

In altre parole,  $\mathbf{M}$  è sfericamente simmetrica rispetto a  $p$  se e solo se  $\exp$  fornisce un isomorfismo di gruppi  $O(g_p) \longrightarrow \mathcal{I}_{\sqrt{\cdot}}(\mathbf{M})$ .

Si ricordi che  $M$  è detta *completa* se ogni geodetica ammette una parametrizzazione su  $\mathbb{R}$ . Come conseguenza immediata della precedente definizione, se  $M$  è sfericamente simmetrica in  $p \in M$ , allora  $M$  è completa.

Dunque, se  $M$  è completa, allora  $\exp$  è definito su  $TM$ . Tuttavia, in generale,  $\exp$  non è iniettiva, in particolare nelle varietà compatte, dove l'esistenza di gruppi di omotopia non banali fornisce un'ostruzione topologica in tal senso [Kli82]. Si può vedere [Kli82] che l'esistenza di punti critici di  $\exp$  è strettamente correlata al problema della non unicità delle geodetiche minimizzanti, ovvero delle geodetiche che minimizzano il funzionale di distanza.

È possibile fornire un insieme aperto massimale  $U_p \subset T_p M$  per ciascun  $p \in M$  che sia stellato rispetto  $0_p$  e in cui  $\exp_p$  sia un diffeomorfismo con una sottovarietà aperta in  $M$  [Kli82], [GHL90]. In tal caso, l'unica geodetica che connette  $p$  con  $q \in \exp_p(U_p)$  è una geodetica minimizzante. L'insieme  $C(p) := \exp_p(\partial U_p)$  è detto *luogo del taglio* di  $p \in M$ . Il teorema di Sard implica che  $C(p)$  ha misura nulla, ma la struttura geometrica di  $C(p)$  è poco conosciuta in generale, specialmente nel caso in cui  $M$  è non compatta. Tuttavia, è facile provare che  $M$  è l'unione disgiunta di  $\exp_p(U_p)$  e  $C(p)$  [GHL90, p. 101].

Nel caso non compatto vale la seguente proprietà [GHL90, p. 91]: per ogni  $p \in M$  esiste una geodetica  $c : [0, +\infty) \rightarrow M$  uscente da  $p$  che minimizza le distanze tra  $p$  e tutti i punti di  $c$ . Una tale geodetica è detta *raggio*.

**Proposizione A.9.1** *Sia  $M$  sfericamente simmetrica rispetto a  $p \in M$ . Sia  $M$  non compatta. Allora  $C(p) = \emptyset$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $c : [0, +\infty) \rightarrow M$  un raggio.

Ogni isometria porta  $c$  in un altro raggio; inoltre, l'ipotesi di simmetria sferica implica che c'è una corrispondenza biettiva fra le direzioni in  $T_p M$  e i raggi. □

**Corollario A.9.1** *Nelle ipotesi della proposizione precedente,  $\exp_p$  è un diffeomorfismo.*

Così, una varietà riemanniana sfericamente simmetrica rispetto ad un suo punto è diffeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , ma non necessariamente isometrica a  $\mathbb{R}^n$ . Tuttavia, vale il seguente risultato fondamentale.

**Teorema A.9.1** *Sia  $M$  sfericamente simmetrica rispetto a  $p \in M$ , e sia  $M$  piatta. Allora,  $\exp_p$  è una isometria.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, ogni varietà compatta che ammette un'azione di  $SO(3)$  per la quale almeno un'orbita è una sfera ha un rivestimento finito diffeomorfo a  $S^3$  o  $S^2 \times S^1$ . Quindi, il suo rivestimento universale non è diffeomorfo a  $\mathbb{R}^3$ . D'altra parte, ogni fibra di  $E$  è una varietà riemanniana piatta, e quindi il suo rivestimento universale è diffeomorfo a  $\mathbb{R}^3$  [KoNo63]. Pertanto, le fibre di  $E$  non possono essere compatte.

Per il precedente corollario,  $M$  è diffeomorfa a  $T_p M$ , quindi [GHL90, p.135] esiste un'isometria  $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La mappa esponenziale commuta con le isometrie [KoNo63,

p.161], quindi si ha il diagramma

$$\begin{array}{ccc} T_p \mathbf{M} & \xrightarrow{\exp_p} & \mathbf{M} \\ T_p \iota \downarrow & & \downarrow \iota \\ T_0 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\exp_0} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

in cui  $\exp_0$  coincide con l'identità, che è un'isometria. Così,  $\exp_p$  è un'isometria.  $\square$

Si noti che, nelle ipotesi del teorema precedente,  $\mathbf{M}$  è sfericamente simmetrica rispetto a tutti i suoi punti.

# BIBLIOGRAFIA

- [AbMa78] R. ABRAHAM, J. MARSDEN: *Foundations of Mechanics*, 2<sup>nd</sup> edition, Benjamin, New York, 1978.
- [And86] I. M. ANDERSON: *Aspects of the Inverse Problem to the Calculus of Variations*, in Proc. Conf. Diff. Geom. and its Appl., Brno, 1986.
- [And92] I. M. ANDERSON: *Introduction to the variational bicomplex*, Contemporary Mathematics, American Math. Soc., **132**, 1992, 51–73.
- [AnDu80] I. M. ANDERSON, T. DUCHAMP: *On the existence of global variational principles*, Amer. Math. J., **102** (1980), 781–868.
- [AnTh92] I. M. ANDERSON, G. THOMPSON: *The Inverse Problem of the Calculus of Variations for Ordinary Differential Equations*, Memoirs of the Am. Math. Soc., **98**, n. 473 (1992).
- [Arn76] V. I. ARNOLD: *Methodes Mathematiques de la Mechanique Classique*, MIR, Moscow, 1978.
- [Bau82] M. BAUDERON: *Le problème inverse du calcul des variations*, Ann. de l’I.H.P., **36**, n. 2 (1982), 159–179.
- [Bau85] M. BAUDERON: *Differential Geometry and Lagrangian Formalism in the Calculus of Variations*, in Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics n. 100: Differential Geometry, Calculus of Variations and their Applications, Marcel Decker, New York, 1985, p. 67.
- [Bre67] G. E. BREDON: *Sheaf Theory*, McGraw–Hill, New York, 1967.
- [BoTu82] R. BOTT, L. W. TU: *Differential Forms in Algebraic Topology*, GTM, n. 82, Springer–Verlag, Berlin, 1982.
- [Car86] E. CARTAN: *On manifolds with an affine connection and the theory of general relativity*, Bibliopolis, Napoli, 1986.
- [CCKM90] A. CABRAS, D. CANARUTTO, I. KOLAR, M. MODUGNO: *Structured bundles*, Pitagora, Bologna, 1990.
- [CJM95] D. CANARUTTO, A. JADCZYK, M. MODUGNO: *Quantum mechanics of a spin particle in a curved spacetime with absolute time*, Rep. on Math. Phys., **36**, 1 (1995), 95–140.

- [Cos94] P. G. COSTANTINI: *On The Geometrical Structure of Euler–Lagrange Equations*, Ann. Mat. Pura ed Applicata, **167**, n. 4 (1994), 389–402.
- [CST85] M. CRAMPIN, W. SARLET, G. THOMPSON: *Higher–Order Differential Equations and Higher–Order Lagrangian Mechanics*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., **99** (1985), 565.
- [Cra81] M. CRAMPIN: *On the Differential Geometry of the Euler–Lagrange Equations and the Inverse Problem of Lagrangian Dynamics*, J. Phys. A: Math. Gen., **15** (1981), 2567–2575.
- [CPT84] M. CRAMPIN, G. E. PRINCE, G. THOMPSON: *A geometrical version of the Helmholtz conditions in time–dependent Lagrangian dynamics*, J. Phys. A: Math. Gen., **17** (1984), 1437–1447.
- [Cra95] M. CRAMPIN: *Jet Bundle Techniques in Analytical Mechanics*, Quaderni del C.N.R.–Gruppo Nazionale di Fisica Matematica, Roma, 1995.
- [DBKP85] C. DUVAL, G. BURDET, H. P. KÜNZLE, M. PERRIN: *Bargmann structures and Newton–Cartan theory*, Phys. Rev. D, **31**, n. 8 (1985), 1841–1853.
- [DeTu80] P. DEDECKER, W. M. TULCZYJEW: *Spectral sequences and the inverse problem of the calculus of variations*, Internat. Coll. on Diff. Geom. Methods in Math. Phys., Aix–en–Provence, 1979; Lecture Notes in Mathematics, n. 836, Springer–Verlag, Berlin, 1980, 498–503.
- [dLRo85] M. DE LÉON, P. RODRIGUEZ: *Generalised Classical Mechanics and Field Theory*, North–Holland, Amsterdam, 1985.
- [Duv93] C. DUVAL: *On Galilean isometries*, Class. Quant. Grav., **10** (1993), 2217–2221.
- [DuKü84] C. DUVAL, H. P. KÜNZLE: *Minimal gravitational coupling in the Newtonian theory and the covariant Schrödinger equation*, G.R.G., **16**, n. 4 (1984), 333–347.
- [Ehl89] J. EHLERS: *The Newtonian limit of general relativity*, in Fisica Matematica Classica e Relatività, Elba 19–13 June 1989, 95–106.
- [FeFr82] M. FERRARIS, M. FRANCAVIGLIA: *On the Global Structure of Lagrangian and Hamiltonian Formalism in Higher Order Calculus of Variations*, Proceed. of the Int. Meet. on Geometry and Physics, Pitagora Editrice, Bologna, 1983, 12–15.
- [FeFr83] M. FERRARIS, M. FRANCAVIGLIA: *Global Formalism in Higher Order Calculus of Variations*, Proceed. of the Conf. on Diff. Geom. and its Appl., Part II, University J. E. Purkyne, Brno, 1984, 93–117.
- [Fer83] M. FERRARIS: *Fibered Connections and the global Poincaré–Cartan Form in Higher Order Calculus of Variations*, Proceed. of the Conf. on Diff. Geom. and its Appl., Part II, University J. E. Purkyne, Brno, 1984, 61–91.

- [FFR84] M. FERRARIS, M. FRANCAVIGLIA, C. REINA: *Fondamenti Matematici delle Teorie Geometriche della Gravitazione*, in Atti del Convegno Nazionale di Relatività generale e Fisica della Gravitazione, Catania, 1982; A. M. Anile, S. Motta, S. Pluchino eds., Catania, 1984.
- [Fra88] M. FRANCAVIGLIA: *Relativistic Theories*, Quaderni del C.N.R.–Gruppo Nazionale di Fisica Matematica, Roma, 1988.
- [FrKr82] M. FRANCAVIGLIA, D. KRUPKA: *The Hamilton formalism in higher order variational problems*, Ann. Inst. H. Poincaré, XXXVII (1982), 295–315.
- [FrNi56] A. FRÖLICHER, A. NIJENHUIS: *Theory of vector-valued differential forms*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. A, 59 (1956) 338–359.
- [GaMu82] P. L. GARCIA, J. MUNOZ: *On the geometrical structure of higher order variational calculus*, Proc. of the IUTAM–ISIMM Symp. on Modern Developments in Anal. Mech., Torino, 1982, Tecnoprint, Bologna, 1983, 127–147.
- [Gar74] P. L. GARCIA PEREZ: *The Poincaré–Cartan Invariant in the Calculus of Variations*, Symposia Mathematica, 14 (1974), 219–246.
- [Gar79] P. L. GARCIA PEREZ: *Cuantificacion geometrica*, Memorias de la R. Acad. de Ciencias de Madrid, XI, Madrid, 1979.
- [GHL90] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE: *Riemannian Geometry*, II ed., Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [GHV72] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE: *Connections, Curvature, and Cohomology*, Vol. I, Academic Press, New York, 1972.
- [GiMa90] G. GIACHETTA, L. MANGIAROTTI: *Gauge-Invariant and Covariant Operators in Gauge Theories*, Int. J. Theoret. Phys. 29, n. 7 (1990), 789–804.
- [Gia92] G. GIACHETTA: *Jet methods in nonholonomic mechanics*, J. Math. Phys. 33, n. 5 (1992), 1652–1665.
- [GMR81] F. GIANDOLFI, G. MARMO, C. RUBANO: *Equivalent Description of Classical Dynamical Systems: Some Differential Geometric Remarks*, Nuovo Cimento B, 66 (1981), 34.
- [God69] C. GODBILLON: *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1969.
- [GöSc87] M. GÖCKELER, T. SCHÜCKER: *Differential geometry, gauge theories and gravity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [GoSt73] H. GOLDSCHMIDT, S. STERNBERG: *The Hamilton–Cartan formalism in the calculus of variations*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23, n. 1 (1973), 203–267.
- [Gre78] W. GREUB: *Multilinear Algebra*, Springer–Verlag, 1978.

- [GuRo65] R. C. GUNNING, H. ROSSI: *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
- [HaEl73] S. HAWKING, G. ELLIS: *The large scale structure of space–time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [HoKo82] M. HORÁK, I. KOLÁŘ: On the higher–order Poincaré–Cartan forms, *Czech. Math. Jour.*, **33** n. 108 (1983), 467–475.
- [Jan93] J. JANYSKA: *Natural 2–forms on the tangent bundle of a Riemannian manifold*, Proceedings of the Winter School Geometry and Topology (Srní, 1992), *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II*, **32** (1993), 165–174.
- [Jan94] J. JANYSKA: *Remarks on symplectic and contact 2–forms in relativistic theories*, *Bollettino U.M.I. (7) 9–B* (1994).
- [JaMo92] A. JADCZYK, M. MODUGNO: *An outline of a new geometrical approach to Galilei general relativistic quantum mechanics*, in C.N. Yang, M.L. Ge and X.W. Zhou editors, *Proc. XXI Int. Conf. on Differential geometrical methods in theoretical physics*, Tianjin 5–9 June 1992, 543–556, Singapore, 1992, World Scientific.
- [JaMo93a] A. JADCZYK, M. MODUGNO: *A scheme for Galilei general relativistic quantum mechanics*, in Proceedings of the 10<sup>th</sup> Italian Conference on General Relativity and Gravitational Physics, World Scientific, New York, 1993.
- [JaMo93b] A. JADCZYK, M. MODUGNO: *Galilei General Relativistic Quantum Mechanics*, 1993, libro in attesa di pubblicazione.
- [JaMo95] J. JANYSKA, M. MODUGNO: *Connections and 2–forms on the velocity space*, di prossima pubblicazione negli atti del convegno *Differential Geometry and its Applications* (Brno, 1995).
- [Kli82] W. KLINGENBERG: *Riemannian Geometry*, de Gruyter Studies in Math. 1, de Gruyter, Berlin, 1982.
- [KLV86] I. S. KRASIL'SHCHIK, V. V. Lychagin, A. M. VINOGRADOV, *Geometry of Jet Spaces and Non–linear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New York, 1986.
- [KMS93] I. KOLÁŘ, P. MICHOR, J. SLOVÁK: *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, 1993.
- [Kol77] I. KOLÁŘ: *On the Euler–Lagrange differential in fibred manifolds*, *Reports on Math. Phys.*, **12** n. 3 (1977), 301–305.
- [Kol83] I. KOLÁŘ: *A geometrical version of the higher order Hamilton formalism in fibred manifolds*, *Jour. Geom. Phys.*, **1**, n. 2 (1984), 127–137.
- [Kol93] I. KOLÁŘ: *Natural operators related with the variational calculus*, in *Proc. of the Conf. Opava on Diff. Geom. and its Appl.*, 1992, Silesian Univ., Opava, 1993, 461–472.

- [KoNo63] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU: *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I e II, Interscience, New York, 1963.
- [Kos70] B. KOSTANT: *Quantization and unitary representations*, Lectures in Modern Analysis and Applications III, Springer–Verlag, **170** (1970), 87–207.
- [KrJa90] D. KRUPKA, J. JANYŠKA: *Lectures on Differential Invariants*, Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Purkynianae Brunensis, Brno, 1990.
- [Kru73] D. KRUPKA: *Some geometric aspects of the calculus of variations in fibred manifolds*, Folia Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis, Brno University, **14**, 1973.
- [Kru83] D. KRUPKA: *Lepagean forms in higher order variational theory*, in Proceedings IUTAM–ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, 1983, 197–238.
- [Kru90] D. KRUPKA: *Variational sequences on finite order jet spaces*, in Proceedings of the Conf. on Diff. Geom. and its Appl., World Scientific, New York, 1990, 236–254.
- [Kru93] D. KRUPKA: *Topics in the calculus of variations: finite order variational sequences*, Proc. Diff. Geom. and its Appl., Opava (Czech Republic), (1993) 473–495.
- [Kru95a] D. KRUPKA: *Variational sequences in mechanics*, pre–print, 1995.
- [Kru95b] D. KRUPKA: *The contact ideal*, Diff. Geom. and its Appl., **5** (1995), 257–276.
- [Kuc80] K. KUČAŘ: *Gravitation, geometry and nonrelativistic quantum theory*, Phys. Rev. D, **22**, n. 6 (1980), 1285–1299.
- [Kün74a] H. P. KÜNZLE: *Galilei and Lorentz invariance of classical particle interaction*, Symposia Mathematica **14** (1974), 53–84.
- [Kün74b] H. P. KÜNZLE: *Galilei and Lorentz structures on space–time: comparison of the corresponding geometry and physics*, Ann. Inst. H. Poincaré **21** (1974), 142.
- [Kün76] H. P. KÜNZLE: *Covariant Newtonian limit of Lorentz space–times*, G.R.G. **7** (1976), 445–457.
- [Kün84] H. P. KÜNZLE: *General covariance and minimal gravitational coupling in Newtonian spacetime*, in Geometrodynamics Proceedings (1983), edit. A. Prastaro, Tecnoprint, Bologna 1984, 37–48.
- [Kup80] B. A. KUPERSCHMIDT: *Geometry of jet bundles and the structure of Lagrangian and Hamiltonian formalism*, in Lecture Notes in Math. n. 775: Geometric Methods in Mathematical Physics, Springer, Berlin (1980) 162–218.
- [Lan72] S. LANG: *Differential Manifolds*, Addison–Wesley, Reading (Ma), 1972.
- [LaTu77] B. LAWTRUK, W. M. TULCZYJEW: *Criteria for Partial Differential Equations to Be Euler–Lagrange Equations*, Jour. of Diff. Equat., **24** (1977), 211–255.

- [LBLL73] M. LE BELLAC, J. M. LEVY-LEBLOND: *Galilean electromagnetism*, Nuovo Cim. **14B**, n. 2 (1973), 217–233.
- [LiMa87] P. LIBERMANN, CH. M. MARLE: *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Reidel Publ., Dordrecht, 1987.
- [Lev73] J. M. LEVY-LEBLOND: *Galilei group and Galilean invariance*, in Group Theory and its Applications, E. M. Loeb ed., **2**, Academic Press, New York 1971, 221–299.
- [Man79] L. MANGIAROTTI: *Mechanics on a Galilean manifold*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **5** (1979), 1–15.
- [MaPa91] E. MASSA, E. PAGANI: *Classical dynamics of non-holonomic systems: a geometric approach*, Ann. Inst. H. Poincaré, **55** (1991), 511–544.
- [MaPa94] E. MASSA, E. PAGANI: *Jet bundle geometry, dynamical connections and the inverse problem of Lagrangian mechanics*, Ann. Inst. Henri Poincaré (1) **61** (1994), 17–62.
- [MaMo83a] L. MANGIAROTTI, M. MODUGNO: *Fibered Spaces, Jet Spaces and Connections for Field Theories*, in Proceed. of the Int. Meet. on Geometry and Physics, Pitagora Editrice, Bologna, 1983, 135–165.
- [MaMo83b] L. MANGIAROTTI, M. MODUGNO: *Some results on the calculus of variations on jet spaces*, Ann. Inst. H. Poincaré, **39**, n. 1 (1983), 29–43.
- [Mod71] M. MODUGNO: *On the structure of classical dynamics*, Riv. Univ. Parma, **7**, n. 4 (1971), 409–429.
- [Mod74] M. MODUGNO: *Formulation of analytical mechanics in general relativity*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A: Physique théorique **XXI** (1974), 147–174.
- [Mod87] M. MODUGNO: *Systems of vector valued forms on a fibred manifold and applications to gauge theories*, Lect. Notes in Math. **1251**, Springer-Verlag, Berlin 1987.
- [Mod91] M. MODUGNO: *Torsion and Ricci tensor for non linear connections*, Diff. Geom. Appl., 1, 2 (1991), 177–192.
- [MFLMR90] G. MORANDI, C. FERRARIO, G. LO VECCHIO, G. MARMO, C. RUBANO: *The inverse problem in the calculus of variations and the geometry of the tangent bundle*, Phys. Rep., **188** (1990), 147–284.
- [MoVi94] M. MODUGNO, A. M. VINOGRADOV: *Some variations on the notions of connection*, Annali di Matematica pura ed Applicata (IV), Vol. CLXVII (1994), 33–71.
- [MoVi95] M. MODUGNO, R. VITOLO: *Quantum connection and Poincaré–Cartan form*, Atti del convegno in onore di A. Lichnerowicz, Frascati, ottobre 1995; ed. G. Ferrarese, Pitagora, Bologna.
- [MTW70] C. W. MISNER, K. S. THORNE, J. A. WHEELER: *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1970.

- [OlSh78] P. J. OLVER, C. SHAKIBAN: *A Resolution of the Euler Operator*, Proc. Am. Math. Soc., **69** (1978), 223–229.
- [Olv86] P. J. OLVER: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, New York, 1986.
- [Pom78] J. F. POMMARET: *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [Pru92] E. PRUGOVEČKI: *Quantum geometry. A framework for quantum general relativity*, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [Pru93] E. PRUGOVEČKI: *On the general covariance and strong equivalence principles in quantum general relativity*, pre–print, 1993.
- [Pru95] E. PRUGOVEČKI: *Principles of quantum general relativity*, World Scientific, Singapore, 1995.
- [Sak85] J. J. SAKURAI: *Modern quantum mechanics*, Benjamin, New York 1985.
- [Sau89] D. J. SAUNDERS: *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge Univ. Press, 1989.
- [SaWu76] R. K. SACHS, H. WU: *General Relativity and Cosmology*, Bull. of Am. Math. Soc., **83**, 1976, 1101–1164.
- [Sch68] L. L. SCHIFF: *Quantum Mechanics*, Third Ed., McGraw–Hill, New York 1968.
- [ScP177] E. SCHMUTZER, J. PLEBANSKI: *Quantum mechanics in non–inertial frames of reference*, Fortschritte der Physik **25** (1977), 37–82.
- [Sni80] J. SNIATICKI: *Geometric quantization and quantum mechanics*, Springer–Verlag, New York 1980.
- [Ste51] N. STEENROD: *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. press, 1951.
- [Tak77] F. TAKENS: *Symmetries, conservation laws and variational principles*, Lecture Notes in Math., **597**, Springer, Berlin, 1977.
- [Tak79] F. TAKENS: *A global version of the inverse problem of the calculus of variations*, J. Diff. Geom., **14** (1979), 543–562.
- [Tho87] G. THOMPSON: *Second–order Equation Fields and the Inverse Problem of the Calculus of Variations*, J. Math. Phys., **28** (1987), 2851.
- [Ton69] E. TONTI: *Variational formulation of nonlinear differential equations (I) and (II)*, Acad. Roy. Belg. C (V) **55** (1969) 137–165 e 262–278.
- [Tra63] A. TRAUTMAN: *Sur la théorie Newtonienne de la gravitation*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 257 (1963), 617–620.
- [Tra66] A. TRAUTMAN: *Comparison of Newtonian and relativistic theories of space–time*, in Perspectives in geometry and relativity (Essays in Honour of V. Hlavaty), n. 42, Indiana Univ. press, 1966, 413–425.

- [Tra96] A. TRAUTMAN: *A metaphysical remark on variational principles*, Acta Phys. Pol. B, XX (1996).
- [Tul75] W. M. TULCZYJEW: *Sur la différentielle de Lagrange*, C. R. Acad. Sc. Paris, série A, **280** (1975), 1295–1298.
- [Tul77] W. M. TULCZYJEW: *The Lagrange Complex*, Bull. Soc. Math. France, **105** (1977), 419–431.
- [Tul80] W. M. TULCZYJEW: *The Euler–Lagrange Resolution*, Internat. Coll. on Diff. Geom. Methods in Math. Phys., Aix–en–Provence, 1979; Lecture Notes in Mathematics, n. 836, Springer–Verlag, Berlin, 1980, 22–48.
- [Tul85] W. M. TULCZYJEW: *An intrinsic formulation of nonrelativistic analytical mechanics and wave mechanics*, J. Geom. Phys., **2**, n. 3 (1985), 93–105.
- [Vin77] A. M. VINOGRADOV: *On the algebro–geometric foundations of Lagrangian field theory*, Soviet Math. Dokl., **18** (1977), 1200–1204.
- [Vin78] A. M. VINOGRADOV: *A spectral sequence associated with a non–linear differential equation, and algebro–geometric foundations of Lagrangian field theory with constraints*, Soviet Math. Dokl., **19** (1978), 144–148.
- [Vin84] A. M. VINOGRADOV: *The C–Spectral Sequence, Lagrangian Formalism and Conservation Laws I and II*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **100**, n. 1 (1984).
- [Vit95a] R. VITOLO: *Spherical symmetry in classical and quantum Galilei general relativity*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, **64**, n. 2 (1996).
- [Vit95b] R. VITOLO: *On in classical and quantum spherically symmetric exact solutions in a spacetime with absolute time*, atti dell’XI Convegno Nazionale di Relatività generale e Fisica della Gravitazione (Trieste, 1994), ed. World Scientific.
- [Vit95c] R. VITOLO: *Some aspects of variational sequences in mechanics*, atti del convegno Differential Geometry and its Applications (Brno, 1995).
- [Vit95d] R. VITOLO: *First–order Lagrangian bicomplexes in mechanics*, pubblicazione del Dipartimento di Matematica Applicata ‘G. Sansone’, 1996.
- [Vit96a] R. VITOLO: *Comparison between different formulations of Lagrangian bicomplexes*, pre–print, 1996.
- [Vit96b] R. VITOLO: *Quantum structures in Galilei and Einstein general relativistic spacetime*, pre–print, 1996.
- [War71] F. W. WARNER: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Illinois, 1971.
- [Wel80] R. O. WELLS: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, GTM, n. 65, Springer–Verlag, Berlin, 1980.

- [Woo92] N. WOODHOUSE: Geometric quantization, Second Ed., Clarendon Press, Oxford 1992.